

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Faculté des sciences d'Orsay

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)

Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger des recherches

Discipline : Mathématiques

par

Igor KORTCHEMSKI

Grands graphes planaires aléatoires et processus de Lévy

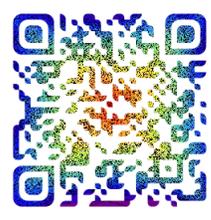
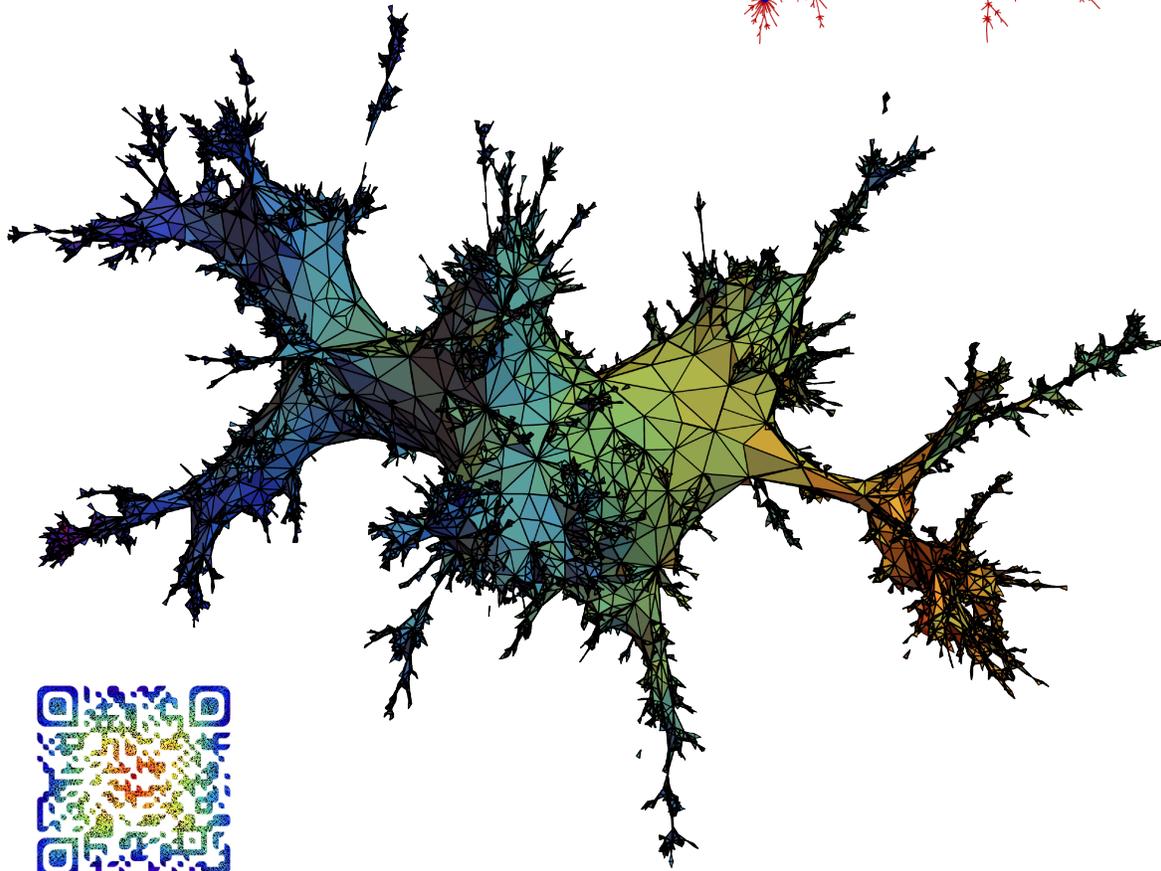
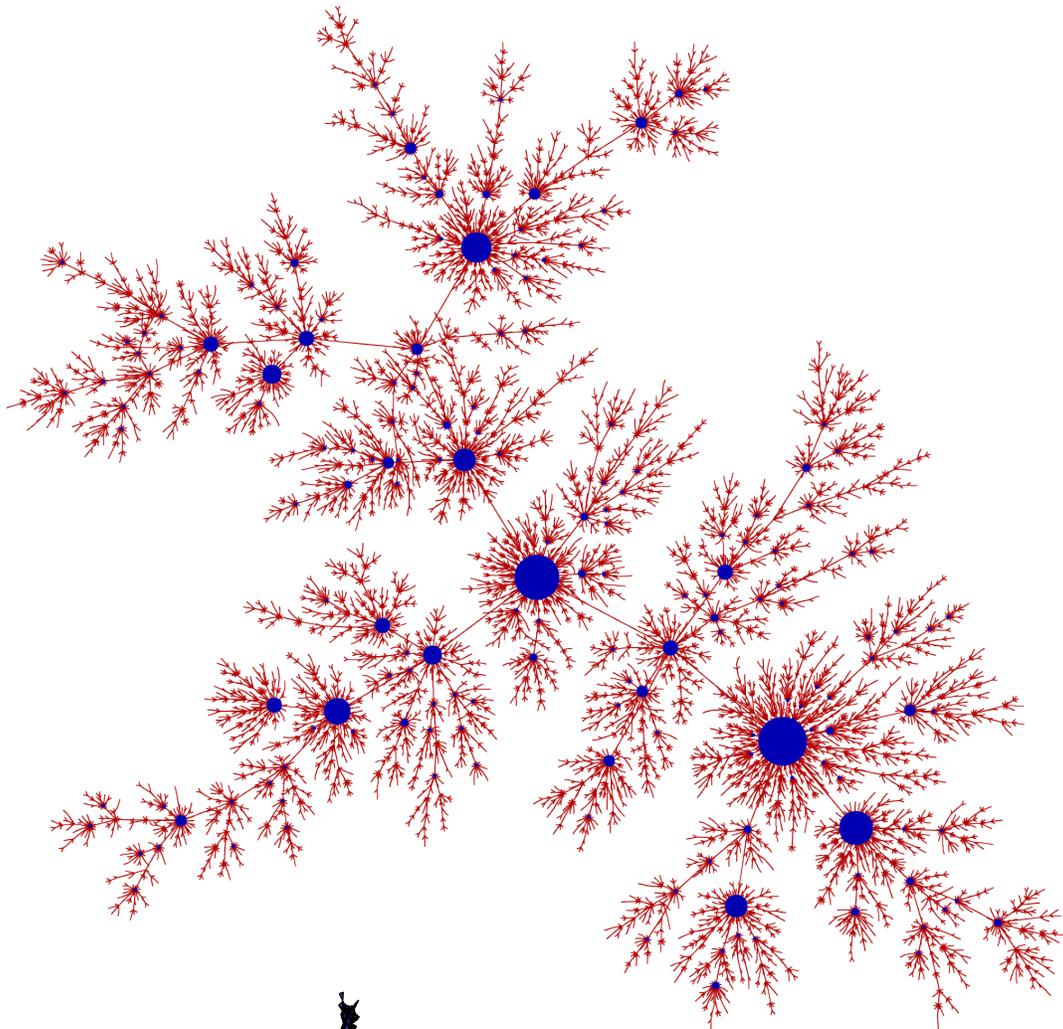
Rapporteurs :

SVANTE JANSON
YVES LE JAN
GRÉGORY MIERMONT

Date de soutenance : le 21 novembre 2016.

Composition du jury :

JEAN BERTOIN	(Examineur)
THOMAS DUQUESNE	(Examineur)
CHRISTINA GOLDSCHMIDT	(Examinatrice)
JEAN-FRANÇOIS LE GALL	(Examineur)
YVES LE JAN	(Rapporteur)
SYLVIE MÉLEARD	(Examinatrice)
GRÉGORY MIERMONT	(Rapporteur)



Remerciements

JE voudrais tout d'abord remercier Svante Janson, Yves Le Jan et Grégory Miermont, dont les travaux m'impressionnent, d'avoir accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire. Je suis reconnaissant à Jean Bertoin, Thomas Duquesne, Christina Goldschmidt, Jean-François Le Gall, Yves Le Jan, Sylvie Méléard et à Grégory Miermont de constituer le jury de soutenance. La présence de chacun d'eux compte beaucoup pour moi.

UN merci tout particulier à Jean-François (GC pour les intimes), qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et qui a été un entremetteur efficace. Merci pour ta gentillesse, ta disponibilité, tes conseils toujours avisés. Merci à Jean de m'avoir accueilli seulement quelques mois à l'Université de Zürich pour un court postdoc : une collaboration fructueuse s'en est suivie, ainsi qu'une redoutable technique cappucinoïstique. Merci également à Nicolas : depuis notre rencontre en thèse, beaucoup de choses se sont passées !

LES résultats de ce manuscrit doivent beaucoup à mes coauteurs :

Timothy Budd
Nicolas Curien
Jean Bertoin Cyril Marzouk
Thomas Duquesne Bénédicte Haas
Jean-Michel Lévesque

Merci à eux ainsi qu'à tous les collègues rencontrés au fil des séminaires, groupes de travail, conférences, etc. pour les discussions mathématiques, et pour tout ce qu'il y a autour.

J'AI eu la chance de bénéficier d'excellentes conditions de travail après ma thèse, entouré de collègues très sympathiques : d'abord au DMA à l'ÉNS de Paris en tant qu'agrégé préparateur, puis quelques mois à l'Université de Zürich pour un postdoc et enfin au CMAP à l'École polytechnique au CNRS. J'en profite pour remercier l'efficacité des personnels administratifs que j'ai côtoyés et leur aide à maintes reprises.

PPLUSIEURS professeurs m'ont guidé et influencé par la beauté de leurs mathématiques à des moments décisifs, et je leur en saurai toujours gré. De l'autre côté de la barrière, merci aux étudiants qui sont parfois cobayes de mes expériences pédagogiques plus ou moins innovantes.

MERCI à mes amis, aux Animath-eurs, pour tout. Enfin, quelques mots pour ma famille, qui m'a toujours soutenu et encouragé : Irina, Grigori, Alexandra, Caramel, Anne, Michel, Guillaume, Marion, Pipou et bien sûr Céline, qui me comprend mieux que moi-même.

Résumé et travaux



Ce mémoire présente une partie de mes travaux effectués après la thèse [26,27,54,56,58,59,80,89,90], qui concernent le comportement asymptotique de grandes structures discrètes aléatoires dans lesquelles apparaissent des phénomènes de queues lourdes et dont des limites d'échelle sont intimement reliées à des processus de Lévy.

Dans une première partie, nous étudions la géométrie de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson critiques dont la loi de reproduction appartient au domaine d'attraction d'une loi stable, vus soit comme graphes (travail [80]) soit à travers leur « arbre à boucles » associé ([58]). Nous nous intéressons ensuite aux propriétés combinatoires et géométriques de différents modèles de configurations planes non croisées aléatoires à la Boltzmann obtenues à partir des sommets d'un polygone régulier, comme les dissections ([54,56]), les partitions non croisées ([89]) et les arbres non croisés ([90]). Dans un troisième chapitre, nous donnons des conditions pour qu'une chaîne de Markov sur les entiers positifs, convenablement renormalisée en espace et en temps, converge au sens fonctionnel vers un processus de Markov positif auto-similaire et présentons quelques applications ([27]). Finalement, nous présentons nos travaux qui touchent aux cartes aléatoires : l'étude du bord de composantes connexes de percolation sur la triangulation aléatoire infinie uniforme du plan ([59]) (où la notion d'arbre à boucles joue un rôle particulier) et une description du parcours en profondeur de grandes triangulations à bord ([59]) (où le principe d'invariance fonctionnel pour les chaînes de Markov précédemment cité joue un rôle particulier).

Les publications [87,88], quelque peu éloignées de la thématique principale de ce mémoire, ne seront pas évoquées.

Prépublication

- [26] BERTOIN, J., CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random planar maps & growth-fragmentations. *Soumis, prépublication disponible sur arXiv, arXiv:1507.02265* (2015)

Publications postérieures à la thèse

- [89] KORTCHEMSKI, I., AND MARZOUK, C. Simply generated non-crossing partitions. *Combin. Probab. Comput. (à paraître)*
- [80] KORTCHEMSKI, I. Sub-exponential tail bounds for conditioned stable Bienaymé-Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields (à paraître)*
- [27] BERTOIN, J., AND KORTCHEMSKI, I. Self-similar scaling limits of Markov chains on the positive integers. *Ann. Appl. Probab.* 26, 4 (2016), 2556–2595
- [88] KORTCHEMSKI, I. Predator–Prey Dynamics on Infinite Trees: A Branching Random Walk Approach. *J. Theoret. Probab.* 29, 3 (2016), 1027–1046
- [90] KORTCHEMSKI, I., AND MARZOUK, C. Triangulating stable laminations. *Electron. J. Probab.* 21 (2016), no. 11, 31p
- [59] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Percolation on random triangulations and stable looptrees. *Probab. Theory Related Fields* 163, 1-2 (2015), 303–337
- [56] CURIEN, N., HAAS, B., AND KORTCHEMSKI, I. The CRT is the scaling limit of random dissections. *Random Structures Algorithms* 47, 2 (2015), 304–327
- [54] CURIEN, N., DUQUESNE, T., KORTCHEMSKI, I., AND MANOLESCU, I. Scaling limits and influence of the seed graph in preferential attachment trees. *J. Éc. polytech. Math.* 2 (2015), 1–34
- [87] KORTCHEMSKI, I. A predator-prey SIR type dynamics on large complete graphs with three phase transitions. *Stochastic Process. Appl.* 125, 3 (2015), 886–917
- [58] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random stable looptrees. *Electron. J. Probab.* 19 (2014), no. 108, 35

Publications issues de la thèse

- [86] KORTCHEMSKI, I. Limit theorems for conditioned non-generic Galton-Watson trees. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, 2 (2015), 489–511
- [57] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random non-crossing plane configurations: a conditioned Galton-Watson tree approach. *Random Structures Algorithms* 45, 2 (2014), 236–260
- [85] KORTCHEMSKI, I. Random stable laminations of the disk. *Ann. Probab.* 42, 2 (2014), 725–759
- [84] KORTCHEMSKI, I. A simple proof of Duquesne’s theorem on contour processes of conditioned Galton-Watson trees. In *Séminaire de Probabilités XLV*, vol. 2078 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Cham, 2013, pp. 537–558
- [83] KORTCHEMSKI, I. Invariance principles for Galton-Watson trees conditioned on the number of leaves. *Stochastic Process. Appl.* 122, 9 (2012), 3126–3172

Publications antérieures à la thèse

- [82] KORTCHEMSKI, I. Asymptotic behavior of permutation records. *J. Combin. Theory Ser. A* 116, 6 (2009), 1154–1166
- [81] KORTCHEMSKI, I. Good Sequences, Bijections and Permutations. *Undergrad. Math J.* 6, 2 (2005), 26p

Table des matières

1 Grands arbres aléatoires	9
1.1 Limites d'échelle d'arbres de Bienaymé–Galton–Watson	11
1.2 Géométrie de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson stables [80]	15
1.3 Arbres à boucles [54,58]	20
2 Configurations planes non croisées de Boltzmann	25
2.1 Dissections aléatoires [56,58]	27
2.2 Partitions non croisées aléatoires [89]	30
2.3 Arbres non croisés aléatoires [90]	33
3 Limites d'échelle de chaînes de Markov sur les entiers positifs [27]	37
3.1 Notations et hypothèses principales	38
3.2 Description et définition du processus limite	39
3.3 Techniques utilisées	40
3.4 Résultats principaux	40
4 Géométrie de grandes cartes aléatoires	45
4.1 Cartes aléatoires	46
4.2 Percolation sur l'UIPT [59]	50
4.3 Parcours en profondeur de triangulations à bord [26]	53
Bibliographie	61

Grands arbres aléatoires

Contenu de ce chapitre

1.1	Limites d'échelle d'arbres de Bienaymé–Galton–Watson	11
1.1.1	Définitions et codage d'arbres plans enracinés	11
1.1.2	Limites d'échelle de grands BGW arbres conditionnés par le nombre de sommets	14
1.2	Géométrie de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson stables [80]	15
1.2.1	Contexte et résultats connus	15
1.2.2	Bornes sous-exponentielles pour des BGW arbres stables	16
1.2.3	Principales techniques	18
1.2.4	Perspectives	19
1.3	Arbres à boucles [54,58]	20
1.3.1	Arbres à boucles stables	20
1.3.2	Arbres à boucles et attachement préférentiel	21
1.3.3	Perspectives	24

Les arbres de Bienaymé–Galton–Watson sont des arbres (plans et enracinés) aléatoires, qui tirent leur nom du processus éponyme étudié indépendamment par Bienaymé et Galton & Watson (voir [78] pour un historique) afin d'estimer la probabilité d'extinction d'une population, où à chaque génération les individus donnent naissance (de manière asexuée) à un nombre aléatoire d'enfants de manière indépendante et homogène (le nombre d'enfants suit une même loi, appelée loi de reproduction). Si ce modèle peut paraître simple au premier abord, sa richesse réside dans la diversité des comportements possibles en fonction de la loi de reproduction et des différents conditionnements, comme nous allons le voir. Par ailleurs, les arbres de Bienaymé–Galton–Watson (abrégé en BGW par la suite) apparaissent comme des briques de base de différents modèles de graphes aléatoires plus complexes (comme par exemple les graphes d'Erdős–Rényi ou, comme nous le verrons plus tard, les cartes aléatoires).

Nous commençons par présenter le plan de cette partie, et décrivons de manière légèrement informelle nos principales contributions.

Section 1.1. Cette partie donne une définition formelle des arbres de BGW, et présente les principaux résultats connus concernant les limites d'échelle de BGW arbres conditionnés à avoir un nombre total fixe d'individus tendant vers l'infini, vus comme espaces métriques compacts en équipant leurs sommets de la distance de graphe. Dans le cas critique, lorsque la loi de reproduction a une variance finie non nulle, la limite d'échelle est l'arbre brownien d'Aldous [6–8,65]. En revanche, lorsque la loi de reproduction est critique mais appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2]$, Duquesne [64] a démontré que la limite d'échelle est l'arbre α -stable, introduit Le Gall & Le Jan [103].

Section 1.2. Nous présentons dans cette Section notre contribution [80], dont le but est d'établir des bornes uniformes concernant la hauteur, la largeur et le degré maximal de BGW arbres conditionnés (critiques et dont la loi de reproduction appartient au domaine d'attraction d'une loi stable) qui soient uniformes en leur taille et qui généralisent les résultats obtenus par Addario-Berry, Devroye & Janson [4] dans le cas de la variance finie. Des estimées fines de ce type sont généralement délicates à établir en raison de deux principales difficultés : d'une part la perte d'indépendance liée au conditionnement, et d'autre part la nature locale du conditionnement. Outre le fait que ces estimées apportent des informations intéressantes sur la structure de ces arbres, elles ont aussi été utilisées pour établir des théorèmes de limite d'échelle pour différentes familles de graphes aléatoires, voir par exemple [41,56,121,124,132] dans le cas de la variance finie, et [35] qui utilise notre Théorème 2 ci-dessous.

Section 1.3. Nous nous intéressons aux « arbres à boucles » associés à des arbres plans, qui est une notion introduite dans l'article [58], écrit en collaboration avec Nicolas Curien. Plus précisément, étant donné un arbre plan τ , son arbre à boucles (discret) associé $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe construit en remplaçant chaque sommet $u \in \tau$ par un cycle discret dont la longueur est donnée par le degré de u , et en collant ces cycles suivant la structure d'arbre de τ (par cycle de longueur k , on entend un graphe avec k sommets v_1, \dots, v_k et dont les arêtes sont $v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$), voir Fig. 1.1.

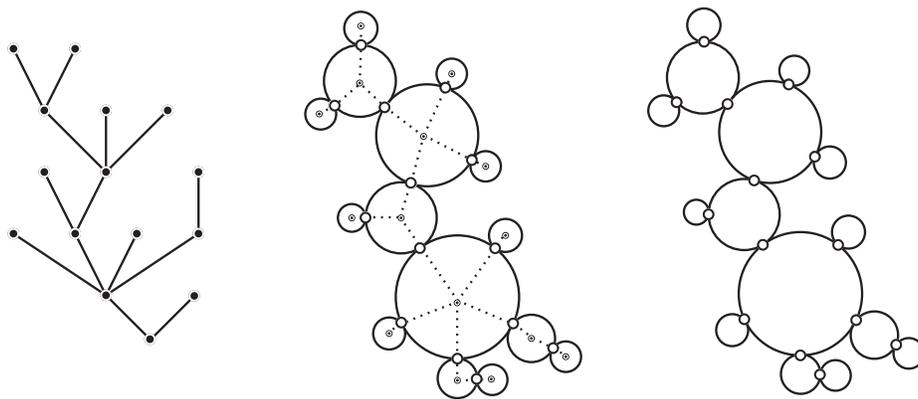


FIGURE 1.1 – Un arbre plan τ et une représentation de son arbre à boucles associé $\text{Loop}(\tau)$.

Voici quelques motivations qui ont amené à la définition et à l'étude d'arbres à boucles :

- $\text{Loop}(\tau)$ décrit la structure des sommets de grand degré dans τ (intuitivement, à un sommet de grand degré dans τ correspond une grande boucle, et donc une grande distance dans $\text{Loop}(\tau)$).
- Lorsque t_n est un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets, avec μ une loi de reproduction critique appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$, $\text{Loop}(t_n)$, convenablement renormalisé, possède une limite d'échelle non triviale, qui est un espace métrique compact aléatoire fractal appelé *arbre à boucles stable d'indice α* , et noté \mathcal{L}_α (voir Section 1.3.1). En fait, les arbres à boucles discrets sont nés comme un modèle simplifié permettant de montrer que les limites d'échelle de grandes dissections aléatoires stables de Boltzmann sont les arbres à boucles stables (voir Section 2.1.1).
- Lorsque T_n est un arbre plan à n sommets construit par attachement préférentiel, $\text{Loop}(T_n)$, convenablement renormalisé, a une limite d'échelle non triviale et qui devrait par ailleurs donner une informations sur l'évolution de ce processus (voir Section 1.3.2).
- L'arbre à boucles stable $\mathcal{L}_{3/2}$ d'indice $\alpha = 3/2$ apparaît comme la limite d'échelle de bords de composantes connexes de percolation critique par sites sur de grandes triangulations aléatoires (voir Section 4.2).

1.1 Limites d'échelle d'arbres de Bienaymé–Galton–Watson

1.1.1 Définitions et codage d'arbres plans enracinés

Arbres de Bienaymé–Galton–Watson. Nous commençons par rappeler le formalisme introduit par Neveu [118] pour définir les arbres plans enracinés. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{N}^* = \{1, \dots\}$. On désigne par \mathcal{U} l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$. Ainsi, un élément de \mathcal{U} est une suite $u = u_1 \cdots u_j$ d'entiers strictement positifs. Par définition, la *longueur* de $u = u_1 \cdots u_n$, notée $|u|$, est l'entier n . Lorsque $u = u_1 \cdots u_j$ et $v = v_1 \cdots v_k$ sont des éléments de \mathcal{U} , on note $uv = u_1 \cdots u_j v_1 \cdots v_k$ la concaténation de u et v . En particulier, on a $u\emptyset = \emptyset u = u$. Finalement, si $u = u_1 \cdots u_n$ et $n \geq 1$, on pose $\text{pr}(u) = (u_1, \dots, u_{n-1})$.

Un *arbre plan enraciné fini* est par définition un sous-ensemble fini non vide $\tau \subset \mathcal{U}$ tel que : (i) $\emptyset \in \tau$, (ii) si $u \in \tau$ avec $|u| \geq 1$, alors $\text{pr}(u) \in \tau$, (iii) si $u \in \tau$, alors il existe un entier $k_u \geq 0$ tel que $u_i \in \tau$ si et seulement si $1 \leq i \leq k_u$. Dans la suite, par arbre nous entendrons toujours arbre plan enraciné fini. On peut voir chaque sommet u d'un arbre τ comme un individu d'une population dont l'arbre généalogique est τ . Le sommet \emptyset est appelé *racine* de l'arbre, et pour tout $u \in \tau$, $k_u = k_u(\tau)$ est le *nombre d'enfants* (ou degré sortant) de u , $|u|$ sa *génération*, $\text{pr}(u)$ son *parent* et plus généralement, les sommets u , $\text{pr}(u)$, $\text{pr} \circ \text{pr}(u)$, \dots , $\text{pr}^{|u|}(u) = \emptyset$ sont ses *ancêtres*. Si $u, v \in \tau$, on note $\llbracket u, v \rrbracket$ le plus court chemin entre u et v . La *taille* d'un arbre τ est son nombre total de sommets, noté $|\tau|$. Pour un arbre τ et $u \in \tau$, on définit l'arbre greffé sur u dans τ par $\theta_u \tau = \{v \in \mathcal{U} : uv \in \tau\}$, qui est bien un arbre. Une *forêt* est par définition une suite finie d'arbres.

Si τ est un arbre et $k \geq 0$, $Z_k(\tau) = \#\{u \in \tau : |u| = k\}$ désigne le nombre de sommets qui ont pour génération k . Finalement, on note respectivement

$$W(\tau) = \sup\{Z_k(\tau) : k \geq 0\}, \quad H(\tau) = \sup\{k : Z_k(\tau) > 0\}, \quad \Delta(\tau) = \sup_{u \in \tau} k_u(\tau)$$

la largeur, hauteur et nombre maximal d'enfants d'un arbre τ .

Soit $\mu = (\mu(j) : j \geq 0)$ une mesure de probabilité sur les entiers positifs, appelée *loi de reproduction*, telle que $\mu(1) < 1$ et $\sum_{j \geq 1} j\mu(j) \leq 1$. La loi d'un *arbre de Bienaymé–Galton–Watson* est l'unique mesure de probabilité \mathbb{P}_μ sur l'ensemble des arbres telle que pour tout $j \geq 0$, $\mathbb{P}_\mu(k_\emptyset = j) = \mu(j)$, et pour tout $j \geq 1$ tel que $\mu(j) > 0$, les arbres $\theta_1\tau, \dots, \theta_j\tau$ sont indépendants sous la loi conditionnelle $\mathbb{P}_\mu(\cdot | k_\emptyset = j)$, et leur loi conditionnelle est \mathbb{P}_μ (voir [100] pour une construction formelle). Un arbre aléatoire de loi \mathbb{P}_μ sera appelé un *arbre de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction μ* (abrégé en BGW_μ arbre). On note aussi $\mathbb{P}_{\mu,j}$ la loi d'une forêt de j BGW_μ arbres indépendants. Le processus $(Z_k(\tau) : k \geq 0)$ sous \mathbb{P}_μ est appelé processus de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction μ .

Nous verrons qu'un outil particulièrement important pour étudier un BGW_μ arbre est une marche aléatoire $(W_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{Z} , issue de 0, et dont la loi des sauts est donnée par $\mathbb{P}(W_1 = i) = \nu(i+1)$ pour tout entier $i \geq -1$.

Arbres simplement générés. On fixe une suite de nombre réels positifs $(w(k) : k \geq 1)$ et on définit le poids d'un arbre plan τ par $\Omega^w(\tau) = \prod_{u \in \tau} w(k_u)$. Ensuite, pour tout entier $n \geq 1$, soit \mathbb{T}_n l'ensemble des arbres plans n sommets, et $Z_n^w = \sum_{\theta \in \mathbb{T}_n} \Omega^w(\theta)$. Finalement, si $Z_n^w > 0$, on peut définir une mesure de probabilité sur \mathbb{T}_n en posant, pour tout $\tau \in \mathbb{T}_n$,

$$\mathbb{P}_n^w(\tau) = \frac{1}{Z_n^w} \Omega^w(\tau).$$

Un arbre aléatoire de loi \mathbb{P}_n^w est dit simplement généré (cette définition remonte à Meir & Moon [111]), ou parfois « de Boltzmann ».

Ainsi, les BGW arbres conditionnés à avoir un nombre fixé de sommets sont des arbres simplement générés. Nous renvoyons à [76] pour une étude détaillée des limites locales d'arbres simplement générés, et de leurs liens avec les BGW arbres.

Codage d'arbres par des chemins. À n'importe quel ordre $u(0) \prec u(1) \prec \dots \prec u(|\tau| - 1)$ sur les sommets d'un arbre τ , on peut associer un chemin $\mathcal{W}(\tau) = (\mathcal{W}_n(\tau), 0 \leq n \leq |\tau|)$ défini par $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$ et pour $0 \leq n \leq |\tau| - 1$:

$$\mathcal{W}_{n+1}(\tau) = \mathcal{W}_n(\tau) + k_{u(n)}(\tau) - 1.$$

Il est aisé de voir qu'on a toujours $\mathcal{W}_{|\tau|}(\tau) = -1$. Trois ordres sont particulièrement intéressants à considérer :

- (i) l'ordre lexicographique, où $v \prec w$ s'il existe $z \in \mathcal{U}$ tel que $v = z(v_1, \dots, v_n)$, $w = z(w_1, \dots, w_m)$ et $v_1 < w_1$;
- (ii) l'ordre lexicographique inversé, où $v \prec w$ s'il existe $z \in \mathcal{U}$ tel que $v = z(v_1, \dots, v_n)$, $w = z(w_1, \dots, w_m)$ et soit $n = 0$, soit $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $v_1 > w_1$;

(iii) l'ordre du parcours en largeur, où $v \prec w$ si $|v| < |w|$, ou si $v = z(v_1, \dots, v_m)$ et $w = z(w_1, \dots, w_m)$ avec $v_1 < w_1$.

Pour chacun de ces ordres, on peut voir qu'on a également $\mathcal{W}_k \geq 0$ pour tout $0 \leq k < |\tau|$. On note $\mathcal{W}^{\text{lex}}(\tau)$, $\mathcal{W}^{\text{inv}}(\tau)$, $\mathcal{W}^{\text{lar}}(\tau)$ les chemins obtenus en utilisant respectivement l'ordre lexicographique, l'ordre lexicographique inversé et l'ordre du parcours en largeur.

Le chemin $\mathcal{W}^{\text{lex}}(\tau)$ est généralement appelé la marche de Łukasiewicz de l'arbre τ . Par ailleurs, dans la suite, si l'ordre des sommets n'est pas précisé, l'ordre lexicographique sera toujours choisi par défaut. Ainsi, par $\mathcal{W}(\tau)$ nous entendrons $\mathcal{W}^{\text{lex}}(\tau)$.

Nous mentionnons maintenant quelques propriétés élémentaires de ces chemins, qui expliquent en particulier leur intérêt pour étudier la géométrie des arbres qu'ils codent.

Lemme 1.1.1. *Soit τ un arbre de taille n .*

(i) *Pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, $\mathcal{W}_i^{\text{lex}}(\tau)$ est égal au nombre d'enfants des sommets de $\llbracket \emptyset, u(i) \rrbracket$ qui sont situés strictement à la droite de $\llbracket \emptyset, u(i) \rrbracket$.*

(ii) *Pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, on a*

$$|u(i)| = \# \left\{ 0 \leq j \leq i - 1 : \mathcal{W}_j^{\text{lex}} = \min_{[j, i]} \mathcal{W}^{\text{lex}} \right\}.$$

(iii) *Pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, $\mathcal{W}_i^{\text{inv}}(\tau)$ est égal au nombre d'enfants de sommets de $\llbracket \emptyset, u(i) \rrbracket$ situés strictement à la gauche de $\llbracket \emptyset, u(i) \rrbracket$.*

(iv) *Pour tout $1 \leq i \leq n$, si $k = |u(i - 1)|$, $\mathcal{W}_i^{\text{lar}}(\tau) + 1$ est égal au nombre total d'enfants de sommets à la génération k qui sont situés avant (au sens large) $u(i - 1)$ (pour l'ordre du parcours en profondeur), auquel on ajoute le nombre de sommets à la génération k strictement plus grand que $u(i - 1)$ (pour l'ordre du parcours en profondeur).*

En particulier, en rappelant que $W(\tau)$ désigne la largeur de τ ,

$$W(\tau) \leq \max \mathcal{W}^{\text{lar}}(\tau) + 1 \leq 2W(\tau). \quad (1.1)$$

En effet, compte tenu du Lemme 1.1.1 (iv), si $u(i)$ est le plus grand sommet (pour l'ordre du parcours en profondeur) de génération k de τ , alors $\mathcal{W}_{i+1}^{\text{lar}}(\tau) + 1 = Z_{k+1}(\tau)$, et si $|u(j)| = k$, alors $\mathcal{W}_{j+1}^{\text{lar}}(\tau) + 1 \leq Z_k(\tau) + Z_{k+1}(\tau)$.

Il est immédiat d'étendre ces codages à des forêts (qui sont, rappelons-le, des suites finies d'arbres). Tout d'abord si $F = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ est une forêt avec un ordre sur les sommets de chacun des arbres qui la constituent, on étend cet ordre à F en posant $u \prec v$ si $u \in \tau_i, v \in \tau_j$ et $1 \leq i < j \leq k$. Le chemin codant $\mathcal{W}(F)$ est alors obtenu en concaténant les sauts de $\mathcal{W}(\tau_1), \dots, \mathcal{W}(\tau_k)$.

Codage d'arbres de Bienaymé–Galton–Watson par des marches aléatoires conditionnées.

On considère la marche aléatoire $(W_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{Z} , issue de 0, et dont la loi des sauts est donnée par $\mathbb{P}(W_1 = i) = \nu(i + 1)$ pour tout entier $i \geq -1$. Pour tout entier $j \geq 1$, on note $\zeta_j = \inf\{n \geq 0 : W_n = -j\}$ et on rappelle que $\mathbb{P}_{\mu, j}$ désigne la loi d'une forêt de j BGW $_{\mu}$ arbres indépendants.

Un outil important pour l'étude de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson est le résultat suivant, qui explique l'intérêt du codage de ces arbres par des chemins.

Proposition 1.1.2. Soit $1 \leq j \leq n$. Pour tout $*$ $\in \{\text{lex}, \text{inv}, \text{lar}\}$, sous $\mathbb{P}_{\mu, j}$, \mathcal{W}^* a la même loi que $(W_0, W_1, \dots, W_{\zeta_j})$. En particulier, le nombre total de sommets d'une forêt aléatoire de loi $\mathbb{P}_{\mu, j}$ a la même loi que ζ_j .

On renvoie par exemple à [100, Proposition 1.5] pour une preuve (celle-ci traite le cas de l'ordre lexicographique, mais reste la même dans le cas général).

Fonction de hauteur et de contour d'un arbre. Pour étudier la géométrie de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson, il est parfois plus pratique d'utiliser des codages alternatifs par la fonction de hauteur ou la fonction de contour. Si τ est un arbre, sa *fonction de hauteur* $\mathcal{H}(\tau) = (\mathcal{H}_n(\tau), 0 \leq n < |\tau|)$ est définie par $\mathcal{H}_n(\tau) = |\mathcal{u}(n)|$ pour $0 \leq n < |\tau|$. On pose également $\mathcal{H}_{|\tau|}(\tau) = 0$.

Pour définir la fonction de contour d'un arbre τ , imaginons une particule qui explore l'arbre en partant de la racine à vitesse unité (on suppose que toutes les arêtes de l'arbre sont de longueur unité), de la façon suivante : lorsque la particule quitte un sommet u , celle-ci se dirige, si possible, vers le premier enfant de u qu'elle n'a pas encore visité, sinon elle revient au parent de u . Pour $0 \leq t \leq 2(|\tau| - 1)$, $\mathcal{C}_t(\tau)$ est alors défini comme étant égal à la distance entre la particule et la racine de τ . Pour des raisons techniques, on pose $\mathcal{C}_t(\tau) = 0$ lorsque $t \in [2(|\tau| - 1), 2|\tau|]$. La fonction $\mathcal{C}(\tau)$ est appelée *fonction de contour* de l'arbre τ .

1.1.2 Limites d'échelle de grands BGW arbres conditionnés par le nombre de sommets

Dans cette partie, nous fixons un paramètre $\alpha \in (1, 2]$. On considère une mesure de probabilité $\mu = (\mu(j) : j \geq 0)$ sur les entiers positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) μ est critique, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i) = 1$;

(ii) μ appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2]$.

D'après [69, Theorem XVII.5.2], la seconde assertion signifie que si X est une variable aléatoire de loi μ , alors $\text{Var}(X \cdot \mathbb{1}_{X \leq n}) = n^{2-\alpha}L(n)$, où $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1$ pour tout $t > 0$ (une telle fonction est dite à variation lente). De manière équivalente, soit la variance de μ est finie, soit $n^\alpha \mu([n, \infty))$ est une (autre) fonction à variation lente (voir [69, Eq. (5.16) et Théorème 2 dans Sec. XVII.5]).

Dans la suite, nous supposons toujours implicitement que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ pour mettre de côté les cas dégénérés, et supposons que μ est apériodique (c'est-à-dire que le sous-groupe additif de \mathbb{Z} engendré par $\{j : \mu(j) \neq 0\}$ est \mathbb{Z}). Pour tout $n \geq 1$ tel que $\mathbb{P}_\mu(|\tau| = n) > 0$, t_n désigne un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. L'apériodicité de μ assure que $\mathbb{P}_\mu(|\tau| = n) > 0$ pour tout n assez grand (les résultats qui suivent s'étendent tous au cas périodique avec des modifications mineures, mais on se restreint au cas apériodique pour simplifier).

On note $(B_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que si $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ , alors $(X_1 + X_2 + \dots + X_n - n)/B_n$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Y_α dont l'exposant de Laplace est donné par $\mathbb{E}[\exp(-\lambda Y_\alpha)] = \exp(-\lambda^\alpha)$ pour tout $\lambda > 0$ ([69, Sec. XVII.5] assure son existence). Notons que Y_α est une variable aléatoire strictement stable d'indice α et spectralement positive. La quantité

B_n est d'ordre $n^{1/\alpha}$ (plus précisément, $B_n/n^{1/\alpha}$ est à variation lente), et on peut prendre $B_n = \sigma\sqrt{n/2}$ quand μ a une variance finie σ^2 .

Le comportement asymptotique de t_n est bien compris grâce aux limites d'échelles de sa marche de Łukasiewicz, de sa fonction de hauteur et de sa fonction de contour. Plus précisément, Duquesne [64] (voir aussi [84]) a prouvé que la convergence

$$\left(\frac{1}{B_n} \cdot \mathcal{W}_{\lfloor nt \rfloor}(t_n), \frac{n}{B_n} \cdot \mathcal{H}_{\lfloor nt \rfloor}(t_n), \frac{n}{B_n} \cdot \mathcal{C}_{2nt}(t_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_t^{\text{exc}}, H_t^{\text{exc}}, H_t^{\text{exc}})_{0 \leq t \leq 1} \quad (1.2)$$

a lieu en loi dans $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})^3$, où $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la topologie de Skorokhod J_1 (voir [75, Chap. VI] pour des précisions à ce sujet), où X^{exc} est l'excursion normalisée d'un processus de Lévy spectralement positif strictement stable d'indice α et H^{exc} sa fonction de hauteur associée (nous renvoyons à [48, 64] pour leur construction). Dans le cas où μ est de variance finie, le principe d'invariance fonctionnel concernant la fonction de contour remonte à Aldous [8] (voir aussi [107]).

Les deux fonctions X^{exc} et H^{exc} codent l'arbre de Lévy α -stable \mathcal{T}_α introduit par Le Gall & Le Jan [103], qui est un \mathbb{R} -arbre réel compact. Dans le cas $\alpha = 2$, \mathcal{T}_α est un multiple de l'arbre brownien d'Aldous [6–8] codé par l'excursion brownienne. Une conséquence intéressante de (1.2) est la convergence renormalisée de t_n vers \mathcal{T}_α . En effet, munissons les classes d'isométrie des espaces métriques compacts de la distance de Gromov–Hausdorff (voir [45] pour des précisions à ce sujet), et considérons t_n comme un espace métrique compact en munissant l'ensemble (fini) de ses sommets de la distance de graphe. Finalement, si $X = (X, d)$ est un espace métrique, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda \cdot X$ est par définition l'espace métrique $(X, \lambda d)$. Alors la convergence $\frac{n}{B_n} \cdot t_n \rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ a lieu en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ pour la topologie de Gromov–Hausdorff [65].

Dans le cas particulier $\alpha = 2$, mentionnons que $(X^{\text{exc}}, H^{\text{exc}}) = (\sqrt{2} \cdot e, \sqrt{2} \cdot e)$, où e est l'excursion brownienne normalisée. Par ailleurs, plus loin dans ce manuscrit, nous utiliserons la notation \mathcal{T}_e pour l'arbre brownien codé par l'excursion brownienne normalisée, de sorte que $\mathcal{T}_2 = \sqrt{2} \cdot \mathcal{T}_e$ (mentionnons que l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\text{Aldous}}$ considéré par Aldous est $\mathcal{T}_{\text{Aldous}} = 2 \cdot \mathcal{T}_e = \sqrt{2} \cdot \mathcal{T}_2$).

1.2 Géométrie de grands arbres de Bienaymé–Galton–Watson stables [80]

Comme dans la Section 1.1.2, ici μ est une loi de reproduction critique, appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2]$, et t_n est un BGW arbre de loi de reproduction μ conditionné à avoir n sommets.

1.2.1 Contexte et résultats connus

Rappelons que $W(\tau)$, $H(\tau)$ et $\Delta(\tau)$ désignent respectivement la largeur, la hauteur et le nombre maximal d'enfants d'un arbre τ .

Le but de l'article [80] est d'étudier les déviations de $W(t_n)$, $H(t_n)$ et $\Delta(t_n)$ par rapport à leurs ordres de grandeur typiques. Pour trouver ces ordres de grandeur, notons que par des

propriétés usuelles de continuité pour topologie de Skorokhod J_1 , la convergence (1.2) implique que

$$\left(\frac{1}{B_n} \cdot \Delta(t_n), \frac{n}{B_n} \cdot H(t_n) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\Delta^*(X^{\text{exc}}), \sup H^{\text{exc}}),$$

où $\Delta^*(X^{\text{exc}}) = \sup_{0 < s \leq 1} (X_s^{\text{exc}} - X_{s-}^{\text{exc}})$ est le plus grand saut de X^{exc} . De plus, il est vraisemblable que cette convergence ait lieu conjointement avec celle de $W(t_n)/B_n$ vers une variable aléatoire positive [79] (mais il ne semble pas y avoir de référence publiée prouvant ceci). Par conséquent, pour tout $u \geq 0$, les quantités $\mathbb{P}(H(t_n) \geq un/B_n)$, $\mathbb{P}(W(t_n) \geq uB_n)$ et $\mathbb{P}(\Delta(t_n) \geq uB_n)$ devraient converger lorsque $n \rightarrow \infty$ vers des fonctions dépendant du u , qui convergent à leur tour vers 0 quand $u \rightarrow \infty$. Il est ainsi naturel de se demander s'il est possible de majorer les quantités $\mathbb{P}(H(t_n) \geq un/B_n)$, $\mathbb{P}(W(t_n) \geq uB_n)$ et $\mathbb{P}(\Delta(t_n) \geq uB_n)$ par des fonctions dépendant de u mais que ne dépendent pas de n .

Dans le cas où μ est critique et a une variance finie, de telles bornes ont été obtenues par Addario-Berry, Devroye & Janson [4, Theorems 1.1 and 1.2], qui ont prouvé l'existence de constantes $C_1, c_1 > 0$ (qui ne dépendent que de μ) telles que les inégalités

$$\mathbb{P}(H(t_n) \geq u\sqrt{n}) \leq C_1 e^{-c_1 u^2}, \quad \mathbb{P}(W(t_n) \geq u\sqrt{n}) \leq C_1 e^{-c_1 u^2}$$

soient vérifiées pour tout $n \geq 1$ et $u \geq 0$. Addario-Berry [2] a obtenu des bornes similaires pour des arbres aléatoires uniformes avec une suite de degrés prescrite satisfaisant à une condition de type « variance finie ». Dans le cas général (mais toujours quand μ est critique et appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice α), une conséquence de Haas & Miermont [74, Lemma 33] est l'existence, pour tout $p > 0$, d'une constante $C_p > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(H(t_n) \geq \frac{un}{B_n}\right) \leq \frac{C_p}{u^p}$$

pour tout $n \geq 1$ et $u \geq 1$ (ce résultat s'applique en fait plus généralement aux arbres aléatoires de type « Markov branchants »).

1.2.2 Bornes sous-exponentielles pour des BGW arbres stables

Nous présentons et commentons maintenant les principaux résultats de [80].

Théorème 1 (Borne pour la largeur, Theorem 1 dans [80]).

Pour tout $\gamma \in (0, \alpha/(\alpha - 1))$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $u \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(W(t_n) \geq uB_n) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\gamma).$$

L'exposant $\alpha/(\alpha - 1)$ est optimal. En effet, pour le voir, nous calculons un équivalent de la queue du supremum du pont de Lévy α -stable spectralement positif X^{br} lorsque $\alpha \in (1, 2)$ (Corollary 13 dans [80]) :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} X_s^{\text{br}} \geq u\right) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|\Gamma(-1/\alpha)|}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\alpha^{(4\alpha-1)/(2\alpha-2)}}{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}} \cdot u^{-\frac{(2+\alpha)(2\alpha-1)}{2(\alpha-1)}} \cdot e^{-(\alpha-1)\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}u^{\alpha/(\alpha-1)}}.$$

En utilisant la transformée de Vervaat, on peut voir que $\mathbb{P}(\sup X^{\text{br}} \geq u) \leq \mathbb{P}(\sup X^{\text{exc}} \geq u)$ pour tout $u \geq 0$. Or, $W(t_n)/B_n \geq \sup(W^{\text{lar}}(t_n) + 1)/B_n$ d'après (1.1), et $\sup(W^{\text{lar}}(t_n) + 1)/B_n$ converge en loi vers $\sup X^{\text{exc}}$ d'après la Proposition (1.1.2) et (1.2). Il s'ensuit que $\alpha/(\alpha-1)$ est bien optimal.

Théorème 2 (Borne pour la hauteur, Theorem 2 dans [80]).

Pour tout $\delta \in (0, \alpha)$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $u \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(H(t_n) \geq u \cdot \frac{n}{B_n}\right) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\delta).$$

L'exposant α est optimal. En effet, pour tout $u \geq 0$, on a $\mathbb{P}(H(t_n) \geq un/B_n) \rightarrow \mathbb{P}(H^{\text{exc}} \geq u)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ par (1.2), et d'après [66, Theorem 1.5] on a

$$\mathbb{P}(\sup H^{\text{exc}} > u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \beta \cdot u^{1+\frac{\alpha}{2}} e^{-(\alpha-1)\frac{1}{\alpha-1}u^\alpha},$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive qui ne dépend que de α .

En remarquant que $\sup W(t_n) \geq \Delta(t_n)$, le Théorème 1 donne alors un contrôle du degré maximal de t_n :

Théorème 3 (Borne pour le degré maximal, Theorem 3 dans [80]).

Pour tout $\delta \in (0, \alpha/(\alpha-1))$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $u \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(\Delta(t_n) \geq uB_n) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\delta).$$

Nous pensons que l'exposant $\alpha/(\alpha-1)$ est optimal ici aussi. Une conséquence intéressante de ce résultat est la convergence suivante pour tout $\alpha \in (1, 2)$ et $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Delta(t_n)^p}{B_n^p}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\Delta^*(X^{\text{exc}})^p].$$

Par ailleurs, le Théorème 3, ainsi que les techniques utilisées dans sa preuve, permet d'obtenir des bornes sur le degré maximal de grands arbres non croisés uniformes (voir Section 2.3 pour une définition) qui généralisent celles obtenues par Deutsch & Noy [61]. Finalement, notons que $\Delta(t_n)$ est la longueur de plus longue boucle de l'arbre à boucles codé par t_n (voir Section 1.3).

Le Théorème 2 estime la probabilité que t_n ait une grande hauteur d'ordre un/B_n . On peut alors se demander quel est le nombre d'individus à la génération un/B_n , sur l'évènement où t_n a une hauteur au moins un/B_n . Dans cet esprit, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 4 (Borne pour les générations, Theorem 5 dans [80]).

Pour tout $\gamma \in (0, \alpha - 1)$ et $\eta > 0$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $u \geq \eta$, $v \geq 0$ et $n \geq 1$ on ait :

$$\mathbb{P}\left(0 < Z_{u \frac{n}{B_n}}(t_n) < v B_n\right) \leq C_1 v^\gamma.$$

Lorsque u varie dans un sous-ensemble compact de $(0, \infty)$, on peut voir que l'exposant $\alpha - 1$ est optimal. Pour prouver le Théorème 4, une étape clé est l'estimée uniforme suivante, concernant la taille Z_n^* de la n -ième génération d'un BGW_μ arbre conditionné à survivre, et qui forme un résultat intéressant en soi ([80, Proposition 6]). Notons $p_n = \mathbb{P}_\mu(Z_n > 0)$. Alors pour tout $\beta \in (0, \alpha)$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on ait

$$\mathbb{P}(p_n Z_n^* \leq x) \leq C \cdot x^\beta.$$

Mentionnons ici qu'en utilisant une approche différente Croydon & Kumagai [51, Proposition 2.6] prouvent cette inégalité lorsque $\beta \in (0, \alpha - 1)$. Cependant, pour établir le Théorème 4, il est important de pouvoir prendre $\beta > \alpha - 1$. De plus l'exposant α est optimal, car d'après [120, Theorem 4], $p_n Z_n^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z^* dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda Z^*}] = \frac{1}{(1 + \lambda^{\alpha-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}, \quad \lambda \geq 0,$$

ce qui implique en particulier l'existence, pour tout $\epsilon > 0$, d'une constante $C > 0$ telle que $\mathbb{P}(Z^* \leq x) \geq Cx^{\alpha+\epsilon}$ pour tout $0 \leq x \leq 1$.

1.2.3 Principales techniques

Nous donnons ici les principales idées et techniques utilisées dans la preuve des théorèmes 1 et 2 présentés dans la Section 1.2.2, qui sont le cœur de [80]. La preuve du Théorème 1 repose sur une majoration de la quantité $\mathbb{P}(\max W(t_n) \geq u B_n)$. Pour cela, nous prouvons que pour tout $\delta \in (0, \alpha/(\alpha - 1))$, il existe $C_1, C_2 > 0$ telle que pour tout $u \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} W_i \geq u B_n \mid \zeta_1 = n\right) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\delta).$$

Comme dans [4], l'idée est que comme la marche aléatoire (W_n) ne peut faire que des sauts négatifs bornés, le coût pour atteindre des grandes valeurs puis revenir près de l'origine est exponentiel. Cependant, pour mettre cette idée en pratique, nous utilisons une approche différente, car [4] utilise une inégalité relative à la marche aléatoire non conditionnée qui n'est connue que dans le cas de la variance finie (voir la discussion après le Theorem 9 dans [80]).

Précisons maintenant les principales étapes de la preuve du Théorème 2. On fixe $\delta \in (0, \alpha)$. Tout d'abord, on suit [4] : en notant $M(z)$ le nombre de sommets qui se greffent sur $[\emptyset, z]$ lorsque $z \in \tau$, on montre, en utilisant le Théorème 1 avec l'inégalité $M(z) \leq \max W^{\text{lex}}(\tau) + \max W^{\text{inv}}(\tau)$ valable pour tout $z \in \tau$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{z \in t_n} M(z) \geq u^{\delta-1} B_n\right) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\delta)$$

pour tout $n \geq 1$ et $2 \leq u \leq B_n$. Il suffit donc de prouver que

$$\mathbb{P} \left(H(t_n) \geq u \cdot \frac{n}{B_n} \quad \text{et} \quad \max_{z \in t_n} M(z) \leq u^{\delta-1} B_n \right) \leq C_1 \exp(-C_2 u^\delta) \quad (1.3)$$

pour tout $n \geq 1$ et $2 \leq u \leq B_n$. Dans [4], cette inégalité est prouvée en utilisant que la largeur et la hauteur de t_n sont du même ordre \sqrt{n} dans le cas où μ est de variance finie. Cependant, dans le cas de la variance infinie, la largeur et la hauteur de t_n ne sont plus du même ordre de grandeur, et l'argument de [4] ne fonctionne plus. Pour obtenir (1.3) dans le cas de la variance infinie, nous montrons que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(H(t_n) \geq u \cdot \frac{n}{B_n} \quad \text{and} \quad \max_{z \in t_n} M(z) \leq u^{\delta-1} B_n \right) \\ & \leq \frac{1}{\mathbb{P}_\mu(|\tau| = n)} \cdot \mathbb{E} \left[\frac{1}{Z_{un/(2B_n)}^*} \right] \cdot \mathbb{E} \left[\frac{1}{B_{M_{un/(2B_n)}^*}} \mathbb{1}_{M_{un/(2B_n)}^* \leq u^{\delta-1} B_n} \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

toujours pour tout $n \geq 1$ et $2 \leq u \leq B_n$, où M_k^* désigne le nombre de sommets se greffant sur les $k-1$ premières générations de l'épine dorsale du BGW arbre conditionné à survivre, et B'_n est une suite telle que $B'_n \sim n$ lorsque $n \rightarrow \infty$. L'inégalité (1.4) provient d'une relation entre la loi d'un BGW arbre coupé à la génération k avec un point uniforme marqué à la génération k et la loi du BGW arbre conditionné à survivre coupé à la k -ième génération (parfois appelée argument de biaisage), combinée avec un argument de troncature pour séparer les sommets qui ont un ancêtre sur la partie basse du spine (les $un/(2B_n)$ premières générations) et les autres, ce qui permet d'obtenir de l'indépendance. La décroissance exponentielle voulue provient de la dernière espérance apparaissant dans (1.4), car $M_{n/B_n}^*/B_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la densité décroît exponentiellement vite en 0. Ce point se révèle être assez délicat, car à chaque étape les estimées doivent être vraies pour tout $n \geq 1$ et $2 \leq u \leq B_n$, et donc en particulier pour différentes échelles de u .

1.2.4 Perspectives

Compte tenu des résultats de [80], plusieurs questions naturelles apparaissent : quel est le comportement asymptotique des quantités $\mathbb{P}(\sup X^{\text{br}} \leq 1/u)$, $\mathbb{P}(\sup X^{\text{exc}} \geq u)$, $\mathbb{P}(\sup X^{\text{exc}} \leq 1/u)$, $\mathbb{P}(\Delta(X^*) \geq u)$ et $\mathbb{P}(\Delta(X^*) \leq 1/u)$ quand $u \rightarrow \infty$? Comme mentionné précédemment, le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(\sup H^{\text{exc}} > u)$ (et de $\mathbb{P}(\sup H^{\text{exc}} < 1/u)$) lorsque $u \rightarrow \infty$ a été décrit avec précision dans [66]. Peut-on trouver une formule explicite pour les quantités $\mathbb{E}[(\sup X^{\text{br}})^p]$, $\mathbb{E}[(\sup X^{\text{exc}})^p]$ et $\mathbb{E}[\Delta(X^*)^p]$ lorsque $p \geq 1$? Dans le cas $\alpha = 2$, la réponse est positive, car X^{exc} et H^{exc} sont alors des multiples de l'excursion brownienne normalisée, (voir par exemple Eq. (5) et Section 1.1 dans [4]). Il semble aussi y avoir une dualité entre le comportement de $\sup X^{\text{exc}}$ au voisinage de ∞ (resp. 0) et le comportement de $\sup H^{\text{exc}}$ au voisinage de 0 (resp. ∞) : en effet, l'exposant intervenant dans la décroissance exponentielle devrait être $\alpha/(\alpha-1)$ pour $\mathbb{P}(\sup X^{\text{exc}} \geq u)$ et $\mathbb{P}(\sup H^{\text{exc}} \leq 1/u)$, et devrait être α pour $\mathbb{P}(\sup X^{\text{exc}} \leq 1/u)$ et $\mathbb{P}(\sup H^{\text{exc}} \geq u)$. Peut-on expliquer ceci directement dans le monde continu ?

Par ailleurs, dans quelle mesure ces résultats s'étendent-ils dans le cas d'une loi de reproduction critique de variance infinie (mais n'appartenant pas nécessairement au domaine d'attraction d'une loi stable) ?

1.3 Arbres à boucles [54,58]

1.3.1 Arbres à boucles stables

L'étude des arbres à boucles associés à de grands BGW arbres stables est l'objet de l'article [58], écrit en collaboration avec Nicolas Curien. On fixe une loi de reproduction critique μ appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$ (notons que nous excluons le cas $\alpha = 2$). Rappelons que t_n est un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets, et que $\text{Loop}(t_n)$ désigne son arbre à boucles discret associé, défini au début de ce chapitre.

Théorème 5 (Limite d'échelle des arbres à boucles discrets, Theorem 3 dans [58]).

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{L}_α , dont la loi ne dépend que de α , tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha.$$

ait lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

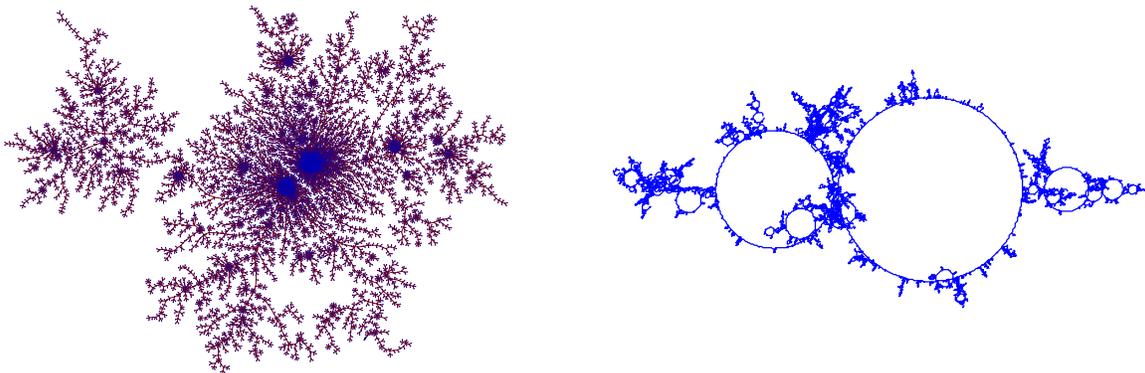


FIGURE 1.2 – À gauche, un arbre stable d'indice $\alpha = 1.1$ et à droite son arbre à boucles associé $\mathcal{L}_{1.1}$, plongé non isométriquement dans le plan (ce plongement de $\mathcal{L}_{1.1}$ contient des boucles qui se croisent, même si elles sont disjointes dans l'espace métrique).

Le facteur de normalisation B_n est naturel, car nous avons déjà vu que le degré maximal de t_n , et donc la longueur de la plus longue boucle de $\text{Loop}(t_n)$, est d'ordre B_n . Pour démontrer le Théorème 5, il est important de définir directement \mathcal{L}_α dans le monde continu. Intuitivement, \mathcal{L}_α est obtenu à partir de l'arbre stable \mathcal{T}_α en remplaçant chaque point de branchement par un cercle de longueur aléatoire dépendant de son « degré » et en recollant ces boucles suivant la structure d'arbre de \mathcal{T}_α (voir Fig. 1.2). Cette heuristique soulève plusieurs problèmes, car d'une part tous les points de branchement de \mathcal{T}_α sont de degré infini et, d'autre part, deux points de branchement sont toujours séparés par une infinité de points de branchement. Ainsi,

plutôt que de définir \mathcal{L}_α à partir de \mathcal{T}_α (ce qui serait possible), nous préférons définir \mathcal{L}_α à partir de X^{exc} , qui code également \mathcal{T}_α . En effet, si on note \mathcal{T}_α l'arbre réel compact codé par X^{exc} (plus précisément, \mathcal{T}_α s'obtient comme un quotient de $[0, 1]$ par une pseudo-distance définie en utilisant X^{exc}), les points de branchement de \mathcal{T}_α sont en bijection avec les sauts de X^{exc} , et les éléments nécessaires pour définir \mathcal{L}_α se lisent aisément sur X^{exc} , à savoir la généalogie de \mathcal{T}_α et le « degré » d'un point de branchement de \mathcal{T}_α , qui est interprété comme étant l'amplitude du saut de X^{exc} qui y est associé. Nous renvoyons à [58] pour une définition précise.

En somme, le Théorème 5 est un principe d'invariance déterministe : nous prouvons essentiellement que si les marches de Łukasiewicz convenablement renormalisées d'une suite d'arbres convergent (au sens de la topologie J_1 de Skorokhod) vers X^{exc} et que leur hauteur est négligeable par rapport au supremum de leur marche de Łukasiewicz, alors leurs arbres à boucles associés ont pour limite d'échelle l'arbre à boucles continu codé par X^{exc} . Cette dernière assertion explique pourquoi le cas $\alpha = 2$ est exclu dans le Théorème 5 : si μ a une variance finie, la hauteur de t_n et $\max \mathcal{W}(t_n)$ sont tous les deux d'ordre \sqrt{n} . En revanche, on s'attend à ce que la conclusion du Théorème 5 demeure si $\alpha = 2$ et si la variance de μ est infinie.

Nous étudions également quelques propriétés de \mathcal{L}_α :

Théorème 6 (Propriétés de \mathcal{L}_α , Theorem 1 et Theorem 2 dans [58]).

- (i) Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de \mathcal{L}_α vaut α .
- (ii) Les deux convergences suivantes ont lieu au sens de Gromov–Hausdorff :

$$\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{(d)} \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{L}_\alpha \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{(d)} \frac{1}{2} \cdot \mathcal{T}_2,$$

où $\mathcal{C}_1 := (2\pi)^{-1} \cdot \mathbb{S}_1$ est un cercle de longueur unité et \mathcal{T}_2 est l'arbre brownien d'Aldous (à une constante multiplicative près).

La première assertion est obtenue en analysant des propriétés fines de X^{exc} grâce à des relations d'absolue continuité par rapport à la loi de $(X_t)_{t \geq 0}$ et la structure des excursions de $(X_t)_{t \geq 0}$ en dessous de son supremum courant. Par ailleurs, comprendre le comportement de \mathcal{L}_α lorsque $\alpha \downarrow 1$ et $\alpha \uparrow 2$ revient à comprendre le comportement de X^{exc} lorsque $\alpha \downarrow 1$ et $\alpha \uparrow 2$. Dans le cas $\alpha \downarrow 1$, X^{exc} converge (en un certain sens) vers $t \mapsto \mathbb{1}_{0 < t \leq 1}(1 - t)$, et dans le cas $\alpha \uparrow 2$, X^{exc} converge vers \mathcal{T}_2 . L'apparition du facteur $1/2$ s'explique par le fait que lorsqu'une géodésique relie un point à un autre point éloigné dans \mathcal{L}_α et qu'elle « entre » dans une boucle, la géodésique a le « choix » d'aller soit vers la droite soit vers la gauche pour minimiser la longueur passée à traverser cette boucle, et par un phénomène ergodique de loi des grands nombres sa longueur sera asymptotiquement deux fois plus petite que la somme des longueurs de toutes les boucles qu'elle aura empruntées. Nous renvoyons à [58] pour les assertions précises et détails.

1.3.2 Arbres à boucles et attachement préférentiel

Dans l'article [54], écrit en collaboration avec Nicolas Curien, Thomas Duquesne et Ioan Manolescu, nous nous intéressons aux arbres aléatoires construits récursivement par attache-

ment préférentiel. Ce modèle a été introduit par Szymánski [133], puis généralisé et popularisé par Albert & Barabási [18] et Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády [37]. Afin de considérer leurs arbres à boucles associés, nous considérons une variante planaire. Plus précisément, étant donné un arbre plan S avec n_0 sommets, la suite d'arbres plans aléatoires $(T_n^{(S)})_{n \geq n_0}$ est définie par $T_{n_0}^{(S)} = S$ et, pour $n \geq n_0$, conditionnellement à $T_{n_0}^{(S)}, \dots, T_n^{(S)}$, l'arbre plan $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin choisi uniformément au hasard de $T_n^{(S)}$ (par définition, un *coin* est un secteur angulaire du plan formé par deux demi-arêtes consécutives adjacentes à un même sommet). Comme le nombre de coins adjacents à un sommet est égal à son degré, la suite d'arbres obtenue en oubliant les plongements planaires est celle construite par attachement préférentiel classique où, à chaque étape, une arête est reliée à un sommet existant choisi au hasard proportionnellement à son degré.

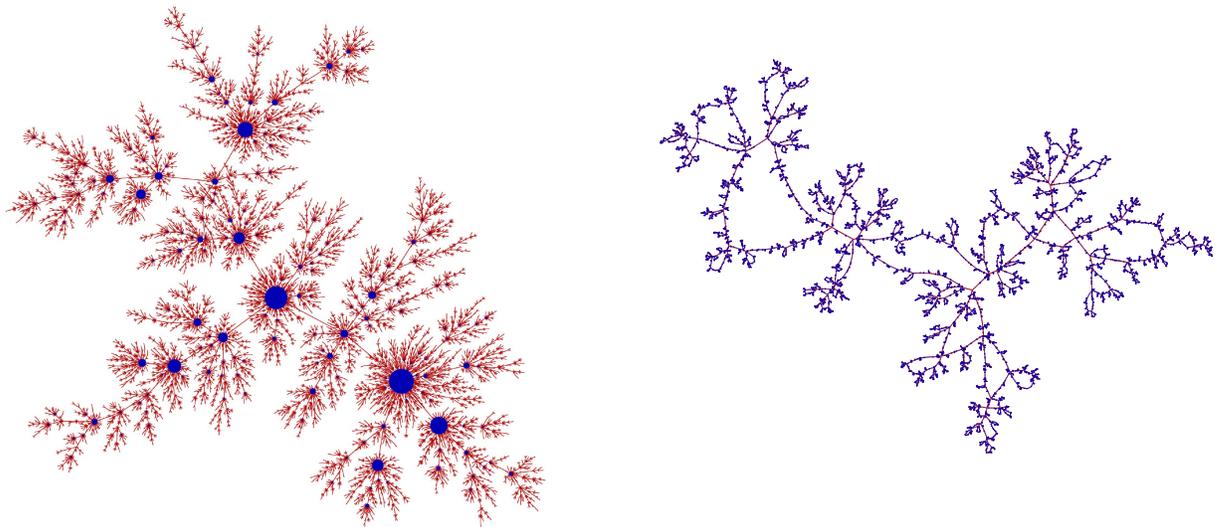


FIGURE 1.3 – Simulations de gauche à droite : $T_{20000}^{(-\circ)}$, où la taille des sommets est proportionnelle à leur degré, et son arbre à boucles associé. Les sommets de grand degré ont tendance à être adjacents, ce qui se traduit par le fait que de grandes boucles sont adjacentes dans son arbre à boucles.

Il est bien connu que le diamètre de $T_n^{(S)}$ est d'ordre $\log(n)$ (voir [136, Sec. 11]), mais que la suite $(\log(n))^{-1} \cdot T_n^{(S)}$ ne converge malheureusement pas en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff. En revanche, nous prouvons que leurs arbres à boucles associés ont une limite d'échelle :

Théorème 7 (Corollary 3 dans [54]).

Pour tout arbre plan S , il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(T_n^{(S)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 2\sqrt{2} \cdot \mathcal{L}^{(S)}$$

ait lieu presque sûrement pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

L'espace métrique compact $\mathcal{L}^{(\circ)}$, où \circ est l'arbre planté constitué d'un sommet et d'une demi-arête (voir [54] pour les détails), joue le rôle d'une brique de base, car l'espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ peut être construit à partir de la donnée d'une collection i.i.d. d'instances de $\mathcal{L}^{(\circ)}$, collées à l'intérieur des coins de S et en étant convenablement mis à l'échelle (nous renvoyons à [54] pour les détails).

Le point crucial de la preuve du Théorème 7 est un couplage, remarqué dans [122], entre (T_n°) et l'algorithme de Rémy [125], qui produit récursivement une suite d'arbres binaires qui, convenablement renormalisés, convergent presque sûrement vers l'arbre brownien [55].

L'espace métrique compact $\mathcal{L}^{(\circ)}$ est appelé *arbre à boucles brownien*. Il peut être construit à partir de l'arbre brownien en identifiant une infinité dénombrable de paires de points (ce qui crée une infinité dénombrable de boucles). Nous donnons ici une définition alternative peut-être plus simple, dans l'esprit de la construction de l'arbre brownien par agrégation proposée par Aldous (voir [123, Theorem 7.6]). On note $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$ les atomes d'un processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ d'intensité $t/2 \cdot dt$. On découpe la demi-droite $[0, \infty)$ aux points θ_k pour créer des segments de longueurs $\theta_1, \theta_2 - \theta_1, \dots$. On colle ensuite les extrémités de chacun des segments pour créer des cercles métriques $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ de périmètres $\theta_1, \theta_2 - \theta_1, \dots$. Ensuite, on construit récursivement les espaces métriques $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ en posant $\mathcal{G}_1 = \mathcal{C}_1$ puis, pour chaque $k \geq 1$, en collant \mathcal{C}_{k+1} sur un point choisi uniformément au hasard de \mathcal{G}_k . L'arbre à boucles brownien est alors la complétion de $\cup_{k \geq 1} \mathcal{G}_k$.

Il faut noter que la géométrie de l'arbre à boucles brownien, où des boucles sont adjacentes, est très différente de celle des arbres à boucles stables introduits précédemment, où des boucles ne sont jamais adjacentes.

Nous calculons également la dimension de Hausdorff de l'arbre à boucles brownien, qui se révèle être la même que celle de l'arbre brownien.

Proposition 8 (Proposition 4 dans [54]).

Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}^{(\circ)}$ est 2.

Finalement, nous conjecturons que $\mathcal{L}^{(S)}$ contient toute l'information asymptotique contenue dans la chaîne de Markov $(T_n^{(S)})_{n \geq n_0}$, autrement dit que les événements asymptotiques pour cette chaîne de Markov sont mesurables par rapport à $\mathcal{L}^{(S)}$. En particulier, nous conjecturons que si S_1 et S_2 sont deux arbres planaires,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\text{TV}}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) = d_{\text{TV}}(\mathcal{L}^{(S_1)}, \mathcal{L}^{(S_2)}), \quad (1.5)$$

où d_{TV} désigne la distance en variation totale.

Bubeck, Mossel & Rácz [42] ont prouvé l'existence de la limite apparaissant dans (1.5), et se sont intéressés à la question de savoir si sa valeur est strictement positive. En notant $d(S_1, S_2)$ la valeur de cette limite, ces auteurs ont démontré que $d(S_1, S_2) > 0$ dès que S_1 et S_2 sont deux arbres ayant des suites de degrés différentes, et ont conjecturé que $d(S_1, S_2) > 0$ si S_1 et S_2 sont deux arbres ayant au moins 3 sommets non isomorphes. Une autre contribution de [54] (Theorem 1 dans [54]) consiste à prouver cette conjecture. Les arguments sont indépendants de l'étude des limites d'échelles des arbres à boucles d'arbres construits par attachement préférentiel. L'idée principale repose sur des martingales construites en utilisant la structure des grands degrés.

1.3.3 Perspectives

Lorsque t_n est un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets, avec μ une loi de reproduction critique appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$, nous avons vu que le diamètre de t_n est d'ordre n/B_n , qui est négligeable par rapport au diamètre de $\text{Loop}(t_n)$ qui est d'ordre B_n . En un certain sens, la structure métrique de t_n est donc perdue dans la limite d'échelle de $\text{Loop}(t_n)$. Pour la préserver, on pourrait alors modifier la définition de $B_n^{-1} \cdot \text{Loop}(t_n)$ en attribuant toujours une longueur B_n^{-1} aux arêtes constituant les boucles de $B_n^{-1} \cdot \text{Loop}(t_n)$, mais au lieu de coller ces boucles par leurs sommets, on pourrait les coller par une arête à laquelle on attribue une longueur $c \cdot B_n/n$, et se demander quelle est la limite d'échelle des espaces métriques compacts aléatoires ainsi construits.

Une autre question naturelle concernant le modèle des arbres construits par attachement préférentiel serait d'étudier les limites d'échelle d'arbres à boucles d'un modèle plus général, comme celui d'arbres construits récursivement en reliant un sommet à un sommet proportionnellement à son degré auquel on ajoute δ , avec un paramètre $\delta > -1$ fixé. Cependant, ces arbres n'ont pas une structure planaire, une manière de définir leur arbre à boucle serait de considérer un ordre uniforme parmi les voisins d'un sommet. On pourrait aussi rajouter plus d'une arête à chaque étape (on n'aurait alors plus nécessairement des arbres), et se demander si cela modifie l'échelle des distances de l'arbre à boucles associé grâce à d'éventuels « raccourcis ».

Configurations planes non croisées de Boltzmann

Contenu de ce chapitre

2.1	Dissections aléatoires [56,58]	27
2.1.1	Dissections stables	28
2.1.2	Dissections browniennes	28
2.1.3	Perspectives	30
2.2	Partitions non croisées aléatoires [89]	30
2.3	Arbres non croisés aléatoires [90]	33

Ce chapitre est consacré à l'étude de différentes familles de configurations planes non croisées aléatoires. Ce sont des objets obtenus à partir des racines n -ièmes complexes de l'unité en les reliant par des segments qui ne peuvent pas se couper. Si différentes statistiques combinatoires ont été étudiées pour de nombreuses familles de configurations non croisées choisies uniformément au hasard parmi plusieurs classes, nous nous intéressons plus particulièrement à leur géométrie globale en les considérant soit comme sous-ensembles compacts du disque, soit comme espaces métriques compacts.

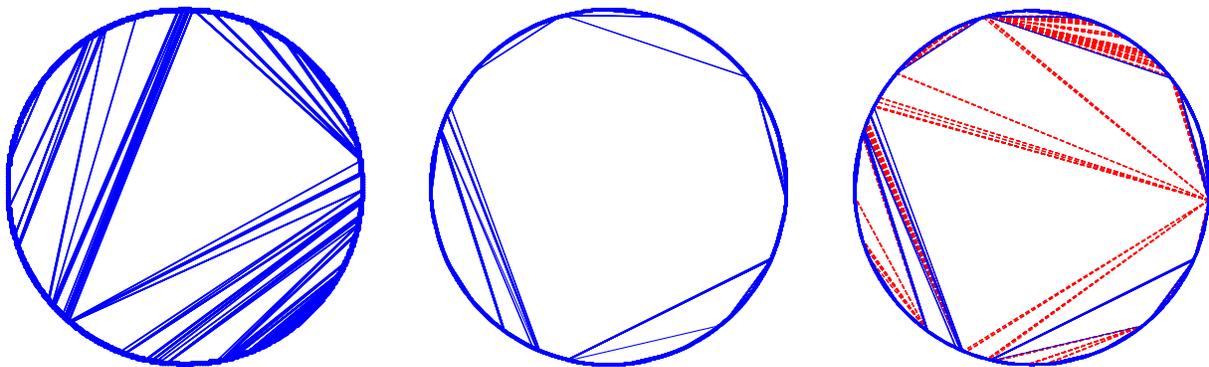


FIGURE 2.1 – Simulations de gauche à droite : la triangulation brownienne, une lamination stable d'indice $\alpha = 1.1$, et la même lamination avec ses faces triangulées « uniformément ».

Notons P_n le polygone formé par les racines n -ièmes complexes de l'unité. L'idée d'étudier les triangulations de P_n comme sous-ensembles compacts du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ du plan

complexe remonte à Aldous [9], qui a prouvé qu’une triangulation aléatoire uniforme de P_n converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$, au sens de la distance de Hausdorff sur l’ensemble des sous-ensembles compacts du disque unité fermé, vers un sous-ensemble compact aléatoire L_2 appelé la *triangulation brownienne*. Cet ensemble est une triangulation, en ce sens que son complémentaire à l’intérieur du disque unité fermé est une union disjointe de triangles, et peut être codé par l’excursion brownienne. Il a ensuite été montré [57] que la triangulation brownienne est une limite universelle de différentes configurations non croisées aléatoires, choisies uniformément au hasard parmi différentes classes comme les dissections (obtenues à partir de P_n en traçant des diagonales qui ne peuvent pas se couper), partitions non croisées ou arbres non croisés. Par ailleurs, l’article [85] construit une famille à un paramètre ($L_\alpha : \alpha \in (1, 2)$) de sous-ensembles compacts aléatoires de \mathbb{D} , appelées *laminations stables*, et qui sont la limite en loi du modèle plus général des dissections aléatoires de Boltzmann, choisies au hasard grâce à une suite de poids à queue lourde favorisant l’émergence de grandes faces. Les laminations stables peuvent être codées par des excursions de processus de Lévy stables spectralement positifs, et leurs faces sont toutes bordées par une infinité de cordes.

Nous commençons par présenter le plan de cette partie, et décrivons de manière légèrement informelle nos principales contributions.

Section 2.1. L’idée de [58] (écrit en collaboration avec Nicolas Curien) et de [56] (écrit en collaboration avec Nicolas Curien et Bénédicte Haas) est de considérer les dissections comme espaces métriques compacts, en munissant l’ensemble des sommets de P_n de la distance de graphe, et d’étudier les limites d’échelle de grandes dissections aléatoires de Boltzmann au sens de la distance de Gromov–Hausdorff. Le cas où la suite de poids est essentiellement à queue lourde est traité par [58] (voir Sec. 2.1.1). La limite d’échelle est alors un arbre à boucles stable introduit dans la Section 1.3.1 (les boucles correspondant aux faces de grand degré y sont de taille comparable au diamètre des dissections).

En revanche, lorsque la suite de poids vérifie essentiellement une condition de variance finie (ce qui englobe le cas des dissections uniformes), le degré des faces devient petit par rapport au diamètre des dissections, et [56] prouve que la limite d’échelle est un multiple de l’arbre brownien d’Aldous (voir Sec. 2.1.2). Ceci donne une justification précise à l’observation de [63] disant que les dissections uniformes « ressemblent » à des arbres.

Ceci complète la famille de classes de graphes aléatoires qui ne sont pas des arbres mais dont la limite d’échelle est l’arbre brownien, comme les triangulations en pile [5], les cartes aléatoires avec une face de degré macroscopique [77], les quadrangulations avec un grand bord [31], les cartes planaires extérieures [46] ou les graphes aléatoires sous-critiques [121].

Section 2.2. Le but de [89], écrit en collaboration avec Cyril Marzouk, est de généraliser les résultats obtenus pour les partitions non croisées uniformes dans [57] en introduisant le modèle des partitions non croisées de Boltzmann. Ce modèle trouve une application en probabilités non-commutatives, car les moments d’une mesure à support compact sur \mathbb{R} sont donnés par la fonction de partition du modèle des partitions non croisées de Boltzmann avec des poids judicieusement choisis. Nos résultats permettent ainsi d’obtenir une formule explicite pour le maximum du support d’une mesure à support compact sur \mathbb{R} en fonction de ses cumulants libres. Une autre motivation consiste à étudier la structure des partitions non croisées avec des contraintes sur les tailles des blocs.

Section 2.3. L'article [90], écrit en collaboration avec Cyril Marzouk, généralise les résultats obtenus pour les arbres non croisés uniformes dans [57] en introduisant le modèle des arbres non croisés de Boltzmann. Lorsque la suite de poids est essentiellement à queue lourde, ces arbres non croisés aléatoires convergent en loi, au sens de la distance de Hausdorff, vers une nouvelle lamination, qui est intuitivement obtenue à partir d'une lamination stable en triangulant chacune de ses faces depuis des points choisis uniformément sur leurs bords (voir la simulation la plus à droite de la Figure 2.1).

2.1 Dissections aléatoires [56,58]

Pour tout entier $n \geq 3$, on rappelle que P_n est le polygone formé par les racines n -ièmes complexes de l'unité. Par définition, une *dissection* de P_n est l'union des côtés de P_n et d'une collection de diagonales dont deux quelconques ne peuvent pas se croiser intérieurement. On note \mathbb{D}_n l'ensemble de toutes les dissections de P_n .

Rappelons le modèle des dissections aléatoires de Boltzmann introduit dans [85]. Soit $w = (w(i) : i \geq 2)$ une suite de nombres réels positifs. Soit $n \geq 3$ un entier. À chaque dissection $D \in \mathbb{D}_n$ on associe un poids $\Omega^w(D)$ défini par

$$\Omega^w(D) = \prod_{f \text{ face interne de } P} w(\deg(f) - 1).$$

où $\deg(f)$ est le degré de la face f , c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui la bordent. On définit ensuite une mesure de probabilité \mathbb{P}_n^w sur \mathbb{D}_n en posant, pour tout $D \in \mathbb{D}_n$,

$$\mathbb{P}_n^w(D) = \frac{\Omega^w(D)}{\sum_{D' \in \mathbb{D}_n} \Omega^w(D')}$$

(on se restreint toujours implicitement aux valeurs de n telles que $\sum_{D' \in \mathbb{D}_n} \Omega^w(D') > 0$). Une dissection aléatoire de P_n de loi \mathbb{P}_n^w est dite *simplement générée* ou *de Boltzmann*.

Si $c > 0$ est fixé et si on pose $\tilde{w}(i) = c^{i-1}w(i)$ pour $i \geq 2$, il est facile de vérifier que $\mathbb{P}_n^w = \mathbb{P}_n^{\tilde{w}}$. Dans la suite, on se restreint aux suites de poids w , dites *critiques*, pour lesquelles la série entière $F(z) = \sum_{i \geq 2} iw(i)z^{i-1}$ vérifie $F(R) \geq 1$ où R est le rayon de convergence de F . Dans ce cas, il existe une suite $(\mu_i : i \geq 2)$ telle que

$$\sum_{i \geq 2} i\mu_i = 1$$

et $\mathbb{P}_n^w = \mathbb{P}_n^\mu$ pour tout $n \geq 3$ (il suffit de poser $\mu_i = c^{i-1}w(i)$ avec c tel que $F(c) = 1$). L'intérêt est qu'en posant $\mu_1 = 0$ et $\mu_0 = 1 - \sum_{i \geq 2} i\mu_i$, l'arbre dual (voir Fig. 2.2) d'une dissection aléatoire de loi \mathbb{P}_n^μ est alors un BGW_μ arbre conditionné à avoir $n - 1$ feuilles, avec μ une loi de reproduction critique.

Pour $n \geq 3$ tel que $Z_n^\mu > 0$, on note \mathcal{D}_n^μ une dissection aléatoire de loi \mathbb{P}_n^μ . On considère \mathcal{D}_n^μ comme un espace métrique compact (en équipant les sommets de \mathcal{D}_n^μ de la distance de graphe, chaque arête ayant longueur unité), et on s'intéresse aux limites d'échelle de \mathcal{D}_n^μ lorsque $n \rightarrow \infty$, au sens de Gromov-Hausdorff.

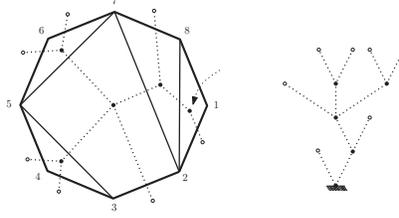


FIGURE 2.2 – L'arbre dual d'une dissection de P_8 , qui a 7 feuilles.

2.1.1 Dissections stables

Soit μ une loi de reproduction critique appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$. On note \mathcal{L}_α l'arbre à boucles stable d'indice α défini dans la Section 1.3.1. Soit finalement $(B_n)_{n \geq 1}$ la suite introduite dans la Section 1.1.2.

Théorème 9 (Corollary 1 dans [58]).

La convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \mathcal{D}_n^\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mu_0^{-1/\alpha} \cdot \mathcal{L}_\alpha$$

a lieu en loi au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff.

Décrivons rapidement la stratégie de la preuve. Tout d'abord l'arbre dual de \mathcal{D}_n^μ est un BGW_μ arbre conditionné à avoir $n - 1$ feuilles. D'après [83], sa marche de Łukasiewicz, convenablement renormalisée, converge vers l'excursion normalisée d'un processus de Lévy α -stable spectralement positif. On montre ensuite que la distance de Gromov–Hausdorff entre \mathcal{D}_n^μ et l'arbre à boucles associé à son arbre dual est négligeable par rapport à B_n , ce qui permet d'utiliser le Théorème 5 pour conclure.

2.1.2 Dissections browniennes

Soit maintenant μ une loi de reproduction critique à variance finie non nulle. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu_i < \infty$ (cette hypothèse de moment exponentiel est technique, et le résultat principal devrait être vrai sans cette hypothèse). Alors le degré des faces de \mathcal{D}_n^μ devient négligeable par rapport au diamètre de \mathcal{D}_n^μ : les faces dégénèrent lorsque $n \rightarrow \infty$, et la limite d'échelle se révèle être un multiple de l'arbre brownien d'Aldous \mathcal{T}_e codé par l'excursion brownienne normalisée e .

Cette constante multiplicative dépend de manière intéressante et non triviale de la loi de reproduction μ . On pose $\mu_{2\mathbb{Z}_+} = \mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots$ et on note $\sigma^2 \in (0, \infty)$ la variance de μ . On pose finalement $c(\mu) = c_{\text{arbre}}(\mu) \cdot c_{\text{geo}}(\mu)$, où

$$c_{\text{arbre}}(\mu) := \frac{2}{\sigma \sqrt{\mu_0}}, \quad c_{\text{geo}}(\mu) := \frac{1}{4} \left(\sigma^2 + \frac{\mu_0 \mu_{2\mathbb{Z}_+}}{2\mu_{2\mathbb{Z}_+} - \mu_0} \right).$$

Théorème 10 (Theorem 1 dans [56]).

La convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n^\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_e$$

a lieu en loi au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff.

Le fait que la constante $c(\mu)$ soit définie comme le produit de deux termes reflète la stratégie de la preuve, qui est en deux étapes. Tout d’abord, comme dans la Section 2.1.1, l’arbre dual de \mathcal{D}_n^μ est un BGW_μ arbre conditionné à avoir $n - 1$ feuilles, avec μ une loi de reproduction critique de variance finie. D’après [83,129], l’arbre dual de \mathcal{D}_n^μ , renormalisé par un facteur $n^{-1/2}$, converge en loi vers $c_{\text{tree}}(\mu) \cdot \mathcal{T}_e$. La seconde étape consiste à montrer que \mathcal{D}_n^μ et son arbre dual, vus comme espaces métriques, sont essentiellement proportionnels, la constante de proportionnalité étant précisément $c_{\text{geo}}(\mu)$. Pour cela, on montre que la longueur d’une géodésique de \mathcal{D}_n^μ , partant de la racine et visant un point typique, est obtenue à partir d’un algorithme d’exploration local, indexé par la géodésique correspondante dans l’arbre dual. Pour étudier cet algorithme, on commence par analyser son comportement sur le BGW_μ arbre conditionné à survivre (dans ce cas, on obtient une chaîne de Markov). Pour chaque pas le long de la géodésique de l’arbre, l’incrément moyen (par rapport à la mesure stationnaire de la chaîne de Markov) est exactement $c_{\text{geo}}(\mu)$. Finalement, pour passer du BGW_μ arbre conditionné à survivre à l’arbre dual de \mathcal{D}_n^μ on utilise des arguments de grandes déviations pour cette chaîne de Markov.

Applications et exemples. Mentionnons tout d’abord quelques cas particuliers intéressants de classes de dissections aléatoires uniformes obtenues en choisissant les poids de manière judicieuse. Si $p \geq 3$ est un entier, on pose $\mu_0^{(p)} = 1 - 1/(p - 1)$, $\mu_{p-1}^{(p)} = 1/(p - 1)$ et $\mu_i^{(p)} = 0$ sinon. Alors $\mathbb{P}_n^{\mu^{(p)}}$ est la loi uniforme sur l’ensemble des p -angulations de \mathcal{P}_n (dans ce cas, $n - 2$ est un multiple de $p - 2$). Dans ce cas,

$$c(\mu^{(p)}) = \frac{p}{2\sqrt{p-1}} \text{ pour } p \text{ pair } (p \geq 4) \quad \text{et} \quad c(\mu^{(p)}) = \frac{(p+1)\sqrt{p-1}}{2p} \text{ pour } p \text{ impair } (p \geq 3).$$

Si $\mu_0 = 2 - \sqrt{2}$, $\mu_1 = 0$ et $\mu_i = ((2 - \sqrt{2})/2)^{i-1}$ pour tout $i \geq 2$, alors \mathbb{P}_n^μ est la loi uniforme sur l’ensemble des dissections de \mathcal{P}_n , et dans ce cas

$$c(\mu) = \frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})2^{3/4} \simeq 1.0605.$$

Le Théorème 10 implique que $\mathbb{E}[F(\mathcal{D}_n^\mu/\sqrt{n})] \rightarrow \mathbb{E}[F(c(\mu) \cdot \mathcal{T}_e)]$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour toute fonction réelle continue bornée F (définie sur les classes d’isométries d’espaces métriques compacts). En contrôlant la vitesse de convergence du Théorème 10, il est possible que cette dernière convergence ait lieu plus généralement pour des fonctions F telles que $F(\mathcal{M}) \leq C \cdot \text{Diam}(\mathcal{M})^p$ pour tout espace métrique \mathcal{M} avec $C, p > 0$ fixés et où $\text{Diam}(\cdot)$ désigne le diamètre, qui est par définition la distance maximale entre deux points d’un espace métrique compact. Par conséquent, nous obtenons des équivalents des moments de tous ordres de différentes statistiques

de \mathcal{D}_n^μ , telles que le rayon, la hauteur d'un point typique ou le diamètre. Par exemple, dans le cas des dissections uniformes, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\text{Diam}(\mathcal{D}_n^\mu)\right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{21}(3 + \sqrt{2})2^{9/4} \sqrt{\pi n} \simeq 1.7723 \sqrt{n}.$$

Ceci améliore un résultat de [63, Section 5].

2.1.3 Perspectives

On peut penser à de multiples prolongements ou généralisations. Par exemple, que se passe-t-il si on remplace les racines n -ièmes de l'unité par n points aléatoires sur le cercle unité? Que se passe-t-il si on autorise un certain de nombres de croisements?

2.2 Partitions non croisées aléatoires [89]

Une *partition* de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ est une collection de sous-ensembles deux à deux disjoints, appelés *blocs*, dont l'union est $[n]$. La *taille* d'un bloc est son cardinal. Une partition *non croisée* de $[n]$ est une partition des sommets de P_n telle que les enveloppes convexes de ses blocs sont deux à deux disjoints. Pour tout entier $n \geq 1$, on note \mathbb{NC}_n l'ensemble des partitions non croisées de $[n]$. Les partitions non croisées ont été introduites par Kreweras [91], et sont devenues un objet combinatoire standard. Elles apparaissent dans beaucoup de contextes différents, comme en topologie en basses dimensions, théorie géométrique des groupes et en probabilités libres (voir l'article de survol [110]).

Dans l'article [89], écrit en collaboration avec Cyril Marzouk, nous nous intéressons à la structure de partitions non croisées aléatoires de Boltzmann. Plus précisément, étant donnée une suite de nombres réels positifs $w = (w(i) : i \geq 1)$, on associe à chaque partition $P \in \mathbb{NC}_n$ un poids $\Omega^w(P)$ défini par :

$$\Omega^w(P) = \prod_{B \text{ bloc de } P} w(\text{taille de } B).$$

Puis, pour tout $P \in \mathbb{NC}_n$, on pose

$$\mathbb{P}_n^w(P) = \frac{\Omega^w(P)}{\sum_{Q \in \mathbb{NC}_n} \Omega^w(Q)}.$$

Comme pour les dissections, on se restreint toujours implicitement aux valeurs de n telles que $\sum_{P \in \mathbb{NC}_n} \Omega^w(P) > 0$. Une partition non croisée aléatoire de $[n]$ de loi \mathbb{P}_n^w est dite *simplement générée* ou *de Boltzmann*.

Une motivation pour considérer ce modèle est qu'il permet d'englober le cas de partitions non croisées avec des contraintes sur les tailles des blocs. En effet, tout d'abord, en prenant $w(i) = 1$ pour tout $i \geq 1$, \mathbb{P}_n^w est la loi uniforme sur \mathbb{NC}_n ; plus généralement, si \mathcal{A} est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, 3, \dots\}$, $w_{\mathcal{A}}(i) = 1$ si $i \in \mathcal{A}$ et $w_{\mathcal{A}}(i) = 0$ si $i \notin \mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}_n^{w_{\mathcal{A}}}$ est la loi uniforme sur l'ensemble des partitions non croisées de $[n]$ dont les blocs ont tous une taille appartenant à \mathcal{A} . On dira que $P_n^{\mathcal{A}}$ est une partition non croisée \mathcal{A} -contrainte. Par exemple,

en prenant $\mathcal{A} = \{k\}$, on obtient la loi uniforme sur l'ensemble des partitions non croisées de $[n]$ n'ayant que des blocs de taille k . Ce type de partitions non croisées a en particulier été étudié dans [17,67]. De même, en prenant $\mathcal{A} = k\mathbb{N}$ on obtient la loi uniforme sur l'ensemble des partitions non croisées de $[n]$ n'ayant que des blocs dont la taille est un multiple de k . Ce type de partitions non croisées a été étudié dans [17].

Une bijection très utile. Pour étudier les partitions non croisées simplement générées, nous utilisons une bijection entre partitions non croisées de $[n]$ et arbres plans à n sommets, qui transforment une partition non croisée simplement générée en un arbre simplement généré, avec la propriété additionnelle que les blocs de taille k sont en bijection avec les sommets ayant k enfants. Ceci permet de reformuler les questions concernant les tailles des blocs en termes de degrés dans les arbres simplement générés, qui est un domaine bien connu.

Mentionnons que pour étudier les partitions non croisées uniformes, [57] utilise l'arbre dual, comme pour les dissections, qui est en quelque sorte un arbre uniforme. Cependant, dans le cas plus général des partitions non croisées simplement générées, cet arbre dual devient un arbre simplement généré à deux types qui est plus compliqué à étudier, ce qui explique pourquoi nous préférons utiliser une autre bijection.

Propriétés combinatoires des partitions non croisées. Comme mentionné précédemment, nous pouvons obtenir de nombreuses propriétés concernant les tailles des blocs de partitions non croisées simplement générées. Pour simplifier, nous citons les résultats dans le cas des partitions non croisées \mathcal{A} -contraintes, et renvoyons à [89] pour des énoncés plus généraux.

Soit \mathcal{A} un sous-ensemble non vide de \mathbb{N}^* avec $\mathcal{A} \neq \{1\}$, et soit $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$ une partition non croisée aléatoire de $[n]$ choisie uniformément au hasard parmi celles dont tous les blocs ont une taille appartenant à \mathcal{A} (on se restreint aux valeurs de n pour lesquelles de telles partitions non croisées existent). Soit $\pi_{\mathcal{A}}$ la mesure de probabilité sur \mathbb{N} définie par

$$\pi_{\mathcal{A}}(k) = \frac{\xi_{\mathcal{A}}^k}{1 + \sum_{i \in \mathcal{A}} \xi_{\mathcal{A}}^i} \mathbb{1}_{k \in \{0\} \cup \mathcal{A}}, \quad \text{où } \xi_{\mathcal{A}} > 0 \text{ est tel que } 1 + \sum_{i \in \mathcal{A}} \xi_{\mathcal{A}}^i = \sum_{i \in \mathcal{A}} i \cdot \xi_{\mathcal{A}}^i.$$

Par exemple, si $k \geq 1$, on a $\pi_{k\mathbb{N}}(i) = \frac{k}{(1+k)^{1+i/k}} \mathbb{1}_{i \in k\mathbb{N}}$ pour $i \geq 0$.

Théorème 11 (Theorem 1 dans [89]).

Les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Soit $S_1(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})$ la taille du bloc contenant 1 dans $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$. Alors, pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(S_1(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}) = k) \rightarrow k\pi_{\mathcal{A}}(k)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Soit B_n un bloc choisi uniformément au hasard dans $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$. Alors, pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(|B_n| = k) \rightarrow \pi_{\mathcal{A}}(k)/(1 - \pi_{\mathcal{A}}(0))$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Soit C un sous-ensemble non vide de \mathbb{N}^* . On note $\zeta_C(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})$ le nombre de blocs de $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$ dont la taille appartient à C . Lorsque $n \rightarrow \infty$, la convergence $\zeta_C(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})/n \rightarrow \pi_{\mathcal{A}}(C)$ a lieu en probabilité, et, de plus, $\mathbb{E}[\zeta_C(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})]/n \rightarrow \pi_{\mathcal{A}}(C)$.

Dans le cas particulier $\mathcal{A} = k\mathbb{N}$, le Théorème 11 (ii,iii) a été prouvé par Ortmann [119, Sec. 2.3]. Arizmendi [16] a aussi obtenu par des arguments combinatoires des formules explicites pour le nombre moyen de blocs de taille fixée dans le cas $\mathcal{A} = k\mathbb{N}$.

Application en probabilités libres. Si μ est une mesure de probabilité à support compact sur \mathbb{R} , il est connu que pour tout entier $n \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} t^n \mu(dt) = \sum_{P \in \text{NC}_n} \prod_{B \text{ bloc de } P} \kappa_{\text{taille}(B)}(\mu),$$

où $(\kappa_i(\mu))_{i \geq 0}$ est la suite des cumulants libres de μ (nous renvoyons à [89] pour leur définition et les détails). En utilisant cette égalité et la bijection décrite précédemment, nous obtenons une formule explicite pour le maximum du support de μ en fonction de ses cumulants libres, et qui simplifie celle obtenue par Ortmann [119, Thm. 5.4].

Propriétés géométriques des partitions non croisées. Comme pour les dissections, nous étudions les partitions non croisées à la Boltzmann en les voyant comme sous-ensembles compacts du disque unité. Essentiellement, lorsque la suite de poids est critique et de variance finie non nulle (ce qui inclut le cas des partitions non croisées \mathcal{A} -contraintes), $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$ converge en loi vers la triangulation brownienne, alors que lorsque la suite de poids est critique est appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$, $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$ converge en loi vers la lamination α stable.

Citons une conséquence intéressante de ceci concernant la longueur de la plus longue corde des partitions non croisées \mathcal{A} -contraintes. Par définition, la longueur (angulaire) d'une corde $[e^{-2i\pi s}, e^{-2i\pi t}]$ avec $0 \leq s \leq t \leq 1$ est $\min(t - s, 1 - t + s)$. Si P est une partition non croisée, on note $C(P)$ la longueur de la plus longue corde de P . Lorsque $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^*$ est un ensemble non vide tel que $\mathcal{A} \neq \{1\}$, un cas particulier des résultats de [89] est la convergence en loi de $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}}$ vers la triangulation brownienne, ce qui implique en particulier que $C(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})$ converge en loi vers la longueur de plus longue corde de la triangulation brownienne. D'après [9,62], sa loi est donnée par

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x - 1}{x^2(1 - x)^2 \sqrt{1 - 2x}} \mathbb{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx. \quad (2.1)$$

Il est remarquable que cette loi limite ne dépende pas du sous-ensemble \mathcal{A} considéré.

Perspectives. Après avoir étudié la longueur de la plus longue corde, il peut être intéressant d'étudier l'aire du bloc de plus grande aire d'une partition non croisée P . En ce sens, une question naturelle est d'étudier P^* , qui est par définition l'union des enveloppes convexes des blocs de P (voir Fig. 2.3 pour un exemple).

Dans le cas où \mathcal{P}_n est une partition non croisée de $[n]$ codée par un BGW arbre critique et de variance finie, est-ce que \mathcal{P}_n^* converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers un sous-ensemble compact du disque? Le cas échéant, cet ensemble limite serait obtenu à partir de la triangulation brownienne en « complétant » quelques triangles, et l'aire du bloc de plus grande aire de \mathcal{P}_n convergerait en loi vers l'aire du triangle complété de plus grande aire.

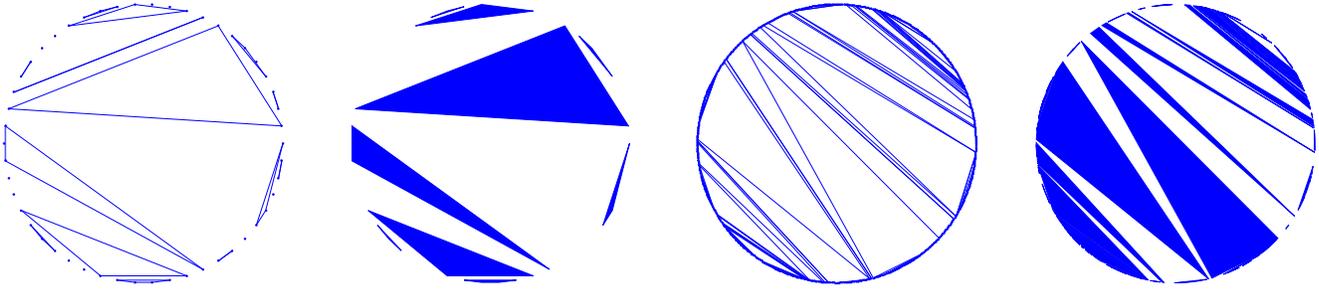


FIGURE 2.3 – De la gauche vers la droite : $P_{50}, P_{50}^{\circ}, P_{500}, P_{500}^{\circ}$, où P_{50} (resp. P_{500}) est une partition non croisée uniforme de $[50]$ (resp. $[500]$).

Dans le cas des partitions non croisées \mathcal{A} -contraintes, des simulations numériques concernant l'aire totale de $\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}, \circ}$ semblent indiquer que la loi de la limite éventuelle, et en particulier du triangle de plus grande aire, dépendrait de \mathcal{A} (alors que ce n'est pas le cas de $\mathcal{C}(\mathcal{P}_n^{\mathcal{A}})$).

2.3 Arbres non croisés aléatoires [90]

L'article [90], écrit en collaboration avec Cyril Marzouk, s'intéresse aux propriétés d'arbres non croisés aléatoires. Par définition, un arbre non croisé à n sommets est un arbre dont les sommets sont les racines n -ièmes de l'unité et dont les arêtes sont des segments qui ne se coupent pas intérieurement. À un arbre non croisé, on peut associer de manière naturelle un arbre plan, appelé sa *forme* (voir Fig. 2.4). Marckert & Panholzer [109] ont prouvé que la forme d'un arbre non croisé uniforme à n sommets est un BGW arbre conditionné à avoir n sommets, mais légèrement modifié (la racine a une loi de reproduction différente), ce qui a permis d'étudier les arbres non croisés uniformes grâce aux techniques des BGW arbres conditionnés. Ce résultat a été utilisé dans [57] pour prouver que, lorsque $n \rightarrow \infty$, les arbres non croisés uniformes à n sommets convergent en loi pour la distance de Hausdorff vers la triangulation brownienne.

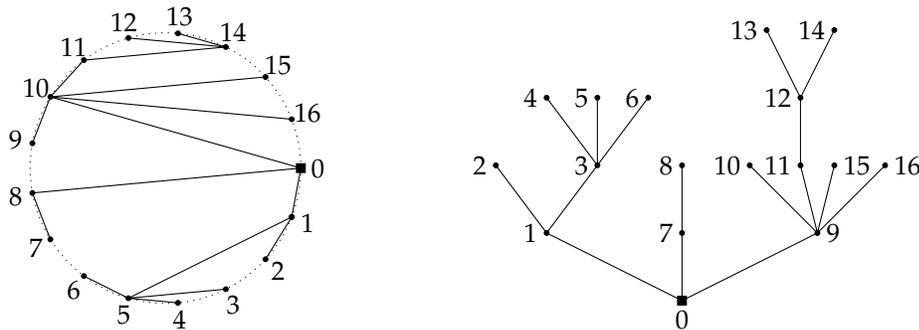


FIGURE 2.4 – Un arbre non croisé (avec ses sommets numérotés dans l'ordre horaire) et sa forme, qui est son arbre plan associé (avec ses sommets numérotés dans l'ordre lexicographique).

L'objet de l'article [90], dans l'esprit de l'étude des dissections de Boltzmann, est de considérer la classe plus générale d'arbres non croisés aléatoires de Boltzmann, et d'étudier les diffé-

rents types de comportements possibles. De manière similaire à précédemment, étant donnée une suite de nombre réels positifs $(w(k) : k \geq 1)$, on définit le poids d'un arbre non croisé θ par $\Omega^w(\theta) = \prod_{u \in \theta} w(\deg u)$. Ensuite, pour tout entier $n \geq 1$, soit \mathbb{A}_n l'ensemble des arbres non croisés à n sommets. On définit une mesure de probabilité \mathbb{P}_n^w sur \mathbb{A}_n en posant, pour tout $\theta \in \mathbb{A}_n$,

$$\mathbb{P}_n^w(\theta) = \frac{\Omega^w(\theta)}{\sum_{\theta' \in \mathbb{A}_n} \Omega^w(\theta')}.$$

Comme d'habitude, on se restreint toujours implicitement aux valeurs de n pour lesquelles $\sum_{\theta' \in \mathbb{A}_n} \Omega^w(\theta') > 0$. Un arbre non croisé aléatoire de loi \mathbb{P}_n^w est dit *simplement généré* ou *de Boltzmann*.

Théorème 12 (Theorem 1.1 dans [90]).

Soit $\alpha \in (1, 2]$. Il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque unité fermé, noté L_α^u , dont la dimension de Hausdorff vaut $1 + \frac{1}{\alpha}$ presque sûrement et tel que l'assertion suivante soit vérifiée. Soit $(w(k) : k \geq 1)$ une suite de nombres réels positifs telle qu'il existe $b > 0$ avec

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k-1)w(k+1)b^k = 0,$$

et, de plus, telle que la mesure de probabilité

$$\mu(k) = \frac{(k+1)w(k+1)b^k}{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)w(\ell+1)b^\ell} \quad (k \geq 0)$$

appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice α . Si Θ_n est un arbre aléatoire non croisé de loi \mathbb{P}_n^μ , alors la convergence en loi

$$\Theta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L_\alpha^u$$

a lieu pour la distance de Hausdorff au sein des sous-ensembles compacts du disque unité fermé.

Donnons une description rapide de L_α^u . Dans le cas $\alpha = 2$, $L_2^u = L_2$ est simplement la triangulation brownienne, alors que pour $\alpha \in (1, 2)$, L_α^u est une triangulation qui contient strictement la lamination α -stable L_α . Intuitivement, L_α^u est construit à partir de L_α en « triangulant » chaque face de L_α depuis un sommet uniforme, c'est-à-dire en joignant ce sommet à chaque autre sommet de la face par une corde (voir l'image la plus à droite de la Figure 2.1 pour une simulation de $L_{1.1}^u$). L'ensemble compact aléatoire L_α^u est appelé *triangulation α -stable uniforme*. Par ailleurs, il se trouve qu'il n'est pas possible de coder L_α^u par une fonction comme la triangulation brownienne ou une lamination stable.

Une conséquence intéressante du Théorème 12 est que la géométrie de grands arbres non croisés simplement générés peut être très différente de la géométrie de grands arbres plans

simplement générés avec les mêmes poids. Une autre conséquence du Théorème 12 concerne la longueur du plus long segment d'un arbre non croisé : si les hypothèses du Théorème 12 sont satisfaites, la longueur de la plus longue corde de Θ_n converge alors en loi vers la longueur de la plus longue corde de $\Lambda(\mathbf{L}_\alpha^u)$. Dans le cas $\alpha = 2$, rappelons que la loi de la plus longue corde de \mathbf{L}_2^u a une densité explicite donnée par (2.1).

Application aux arbres non croisés à degrés contraints. Comme pour les partitions non croisées, le modèle des arbres non croisés simplement générés englobe celui des arbres non croisés uniformes avec des contraintes sur les degrés. Plus précisément, soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^*$ avec $1, 2 \in \mathcal{A}$. En posant $w(k) = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{A}}$, si $\Theta_n^{\mathcal{A}}$ est un arbre non croisé aléatoire de loi \mathbb{P}_n^w , $\Theta_n^{\mathcal{A}}$ est uniforme sur l'ensemble des arbres non croisés à n sommets et dont tous les degrés appartiennent à \mathcal{A} . Le Théorème 12 s'applique alors avec $\alpha = 2$, de sorte que $\Theta_n^{\mathcal{A}}$ converge vers la triangulation brownienne. En particulier, la longueur de la plus longue corde de $\Theta_n^{\mathcal{A}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est donnée par (2.1). Il est remarquable que cette loi limite ne dépende pas de \mathcal{A} .

Perspectives. La triangulation \mathbf{L}_α^u est construite à partir de \mathbf{L}_α en « triangulant » chaque face de \mathbf{L}_α depuis un sommet uniforme. On pourrait imaginer « remplir » les faces de \mathbf{L}_α d'une autre manière, par exemple en les remplissant par des laminations β -stables indépendantes, et ainsi de suite. Il serait alors intéressant de calculer leur dimension de Hausdorff, et de voir si leurs lois sont singulières les unes par rapport aux autres.

Limites d'échelle de chaînes de Markov sur les entiers positifs [27]

Contenu de ce chapitre

3.1	Notations et hypothèses principales	38
3.2	Description et définition du processus limite	39
3.3	Techniques utilisées	40
3.4	Résultats principaux	40
3.4.1	Régime « transient »	40
3.4.2	Régime « récurrent »	41
3.4.3	Régime « récurrent positif »	42
3.4.4	Exemples d'application	43
3.4.5	Perspectives	43

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'article [27], écrit en collaboration avec Jean Bertoin. Le but de ce travail est d'étudier des chaînes de Markov sur les entiers positifs pour lesquelles, essentiellement, des sauts d'amplitude macroscopique sont rares et surviennent à un taux qui est une puissance négative de la position de la chaîne et pour lesquelles les petits sauts positifs et négatifs se « compensent ». Si X_n est une telle chaîne de Markov issue de n , nous donnons des conditions explicites sur ses probabilités de transitions qui garantissent une convergence fonctionnelle du processus $\frac{1}{n}X_n$, convenablement mis à l'échelle en temps, vers un processus de Markov auto-similaire positif, et nous identifions trois régimes distincts (voir Fig. 3.1).

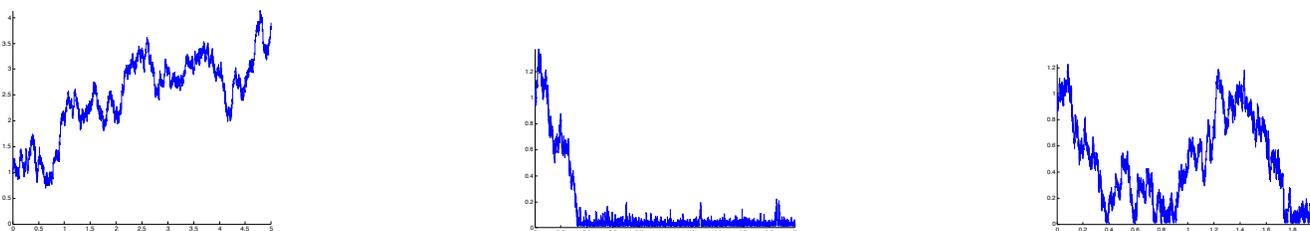


FIGURE 3.1 – Trois différents régimes asymptotiques pour le processus X_n/n avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$: dans le premier cas, celui-ci ne touche pas la frontière (cas transient), dans le second cas il s'approche de la frontière et y reste un temps macroscopique (cas récurrent positif), et dans le dernier cas il s'approche de la frontière une infinité de fois et faisant des excursions macroscopiques en dehors (car récurrent nul).

Plusieurs motivations sont sous-jacentes à ce travail. Tout d'abord, ceci étend les résultats de Haas & Miermont [73], qui se sont intéressés au cas des chaînes de Markov décroissantes. D'autre part, des chaînes de Markov satisfaisant à nos conditions modélisent l'évolution de la « taille » d'une composante dans plusieurs processus stochastiques combinatoires (en particulier en cartes aléatoires, voir Sec. 4.3.3).

3.1 Notations et hypothèses principales

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $(p_{n,k} : k \geq 1)$ une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_{k \geq 1} p_{n,k} = 1$ pour tout $n \geq 1$, et soit $(X_n(k) : k \geq 0)$ la chaîne de Markov homogène en temps discret partant de n telle que la probabilité de transition de i vers j est $p_{i,j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$. Plus précisément, $X_n(0) = n$ et $\mathbb{P}(X_n(k+1) = j \mid X_n(k) = i) = p_{i,j}$ pour tous $i, j \geq 1$ et $k \geq 0$.

Pour $n \geq 1$, soit Π_n^* la mesure de probabilité sur \mathbb{R} définie par

$$\Pi_n^*(dx) = \sum_{k \geq 1} p_{n,k} \cdot \delta_{\ln(k) - \ln(n)}(dx),$$

qui est la loi de $\ln(X_n(1)/n)$. Nous préférons considérer la loi de $\ln(X_n(1)/n)$ au lieu de la loi de $X_n(1)/n$ simplement pour des raisons techniques. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs à variation régulière d'indice $\gamma > 0$ (c'est-à-dire $a_{\lfloor xn \rfloor} / a_n \rightarrow x^\gamma$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour tout $x > 0$ fixé, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). Soit Π une mesure positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $\Pi(\{-1, 1\}) = 0$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty.$$

Finalement, on pose $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Nos deux hypothèses principales sont les suivantes :

(H1) Lorsque $n \rightarrow \infty$, la convergence suivante a lieu au sens de la convergence vague des mesures sur $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$:

$$a_n \cdot \Pi_n^*(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(v)} \Pi(dx).$$

En d'autres termes, $a_n \cdot \mathbb{E}[f(X_n(1)/n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(e^x) \Pi(dx)$ pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact inclus dans $[0, \infty] \setminus \{1\}$.

(H2) On a

$$a_n \cdot \int_{-1}^1 x \Pi_n^*(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b, \quad a_n \cdot \int_{-1}^1 x^2 \Pi_n^*(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2 + \int_{-1}^1 x^2 \Pi(dx),$$

pour certaines constantes $b \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geq 0$.

Intuitivement, l'hypothèse (H1) traduit le fait que les grands sauts sont rares et surviennent à un taux qui est une puissance négative de la position de la chaîne (si la chaîne est en n , les sauts d'amplitude au moins en surviennent à un taux qui est d'ordre $n^{-\gamma}$) et l'hypothèse (H2) traduit le fait que les petits sauts positifs et négatifs se « compensent ».

3.2 Description et définition du processus limite

Dans notre cas, les processus stochastiques apparaissant dans la limite d'échelle seront des processus de Markov auto-similaires sur \mathbb{R}_+ . Intuitivement, cela peut s'expliquer par les travaux de Lamperti [96], qui montre que les processus stochastiques auto-similaires sont les limites d'échelle de processus stochastiques généraux; par ailleurs, dans le cas des chaînes de Markov, il est naturel de s'attendre à ce que le processus limite soit markovien. Or Lamperti [98] a également démontré que les processus de Markov auto-similaires sur \mathbb{R}_+ sont étroitement reliés à des exponentielles de processus de Lévy changés de temps. Cette correspondance s'appelle la transformation de Lamperti, et nous commençons par la présenter.

Soit $(\xi(t))_{t \geq 0}$ le processus de Lévy dont l'exposant de Laplace est donné par la formule de Lévy–Khintchine

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + i b\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) \Pi(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cela signifie que $\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi(t)}] = e^{t\Phi(\lambda)}$ pour $t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. On pose alors

$$I_\infty = \int_0^\infty e^{\gamma\xi(s)} ds \in (0, \infty].$$

Il est connu que $I_\infty < \infty$ p.s. si ξ dérive vers $-\infty$ (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = -\infty$ p.s.), et $I_\infty = \infty$ p.s. si ξ dérive vers $+\infty$ ou oscille, voir [28, Theorem 1] (cette référence donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes sur les caractéristiques du processus de Lévy ξ qui garantissent que ξ dérive vers $-\infty$ presque sûrement). Pour tout $t \geq 0$, on pose alors

$$\tau(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u e^{\gamma\xi(s)} ds > t \right\}$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = \infty$. Finalement, on définit la transformation de Lamperti [98] de ξ par

$$Y(t) = e^{\xi(\tau(t))} \quad \text{pour } 0 \leq t < I_\infty, \quad Y(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq I_\infty.$$

Ainsi, Y touche 0 (et est absorbé) en temps fini presque sûrement si, et seulement si, ξ dérive vers $-\infty$.

Par construction, le processus Y est un processus de Markov auto-similaire d'indice $1/\gamma$ issu de 1. Rappelons que si \mathbb{P}_x désigne la loi d'un processus de Markov $(M_t)_{t \geq 0}$ issu de $x \geq 0$, alors M est dit auto-similaire d'indice $\alpha > 0$ si la loi de $(r^{-\alpha} M_{rt})_{t \geq 0}$ sous \mathbb{P}_x est $\mathbb{P}_{r^{-\alpha}x}$ pour tout $r > 0$ et $x \geq 0$. Lamperti [98] a introduit et étudié les processus de Markov auto-similaires positifs, et a prouvé que, réciproquement, tout processus de Markov auto-similaire positif qui ne touche pas 0 et ∞ , ou les atteint continûment (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de meurtre dans $(0, \infty)$) avec absorption en 0 peut être construit en utilisant la transformation précédente.

3.3 Techniques utilisées

Compte tenu de la diversité des techniques existantes pour établir des convergences fonctionnelles de processus de Markov (voir en particulier Ethier & Kurtz [68] et Jacod & Shiryaev [75]), on pourrait s'attendre à ce que l'étude des limites d'échelle de chaînes de Markov sur \mathbb{N}^* devrait faire partie du folklore : en effet, il est bien connu que la convergence faible de processus de Feller est équivalente à la convergence de générateurs infinitésimaux (en un certain sens).

Cependant, dans notre cas, une difficulté majeure apparaît concernant l'existence d'une frontière pour des processus de Markov auto-similaires sur $[0, \infty)$. En effet, 0 peut par exemple être absorbant, ou réfléchissant (avec une réflexion continue, ou bien par un saut) : voir en particulier [21,49,70,127,128]. D'un point de vue analytique, cela revient à trouver un noyau d'un processus de Markov auto-similaire positif et d'identifier l'action de son générateur infinitésimal sur ce noyau, en particulier au voisinage de 0 où une singularité apparaît. En général, ces questions sont ouvertes et semblent assez délicates.

Pour éviter la singularité en 0, nous étudions un nouveau processus obtenu à partir de la chaîne de Markov initiale, plongée en temps continu, par changement de temps. Celui-ci est effectué de sorte que la limite d'échelle du nouveau processus est l'exponentielle d'un processus de Lévy. Cette convergence est obtenue en utilisant la caractérisation de la convergence fonctionnelle par des générateurs. L'idée est que le comportement des noyaux et générateurs sont mieux connus pour des processus de Lévy et leurs exponentielles que pour les processus de Markov auto-similaires sur $[0, \infty)$. Pour revenir à la chaîne de Markov initiale à partir de ce nouveau processus, il reste alors à effectuer le changement de temps inverse (qui est étroitement relié à la transformation de Lamperti).

Enfin, notre approche présente quelques similarités avec celle de Haas & Miermont [73], qui se sont intéressés au cas des chaînes de Markov décroissantes, mais aussi quelques différences. En particulier, Haas & Miermont prouvent d'abord un résultat de tension, puis identifient la loi des limites possibles en utilisant des problèmes de martingales, alors que nous travaillons plutôt avec des générateurs infinitésimaux de processus de Lévy.

3.4 Résultats principaux

3.4.1 Régime « transient »

On note $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles, muni de la topologie J_1 de Skorokhod.

Théorème 13 (Theorem 1 dans [27]).

On suppose que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées, et que le processus de Lévy ξ ne dérive pas vers $-\infty$. Alors la convergence

$$\left(\frac{X_n(\lfloor a_n t \rfloor)}{n} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (Y(t) : t \geq 0)$$

a lieu en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Dans ce cas, d'après la construction de Y dans la Section 3.2, presque sûrement on a $Y_t > 0$ pour tout $t \geq 0$, et nous renvoyons à la simulation la plus à gauche de la Figure 3.1 pour une illustration.

Comme mentionné dans la Section 3.3, l'idée principale consiste à plonger X_n en temps continu en considérant un processus de Poisson indépendant \mathcal{N}_n de paramètre a_n , ce qui permet la construction d'un processus de Markov L_n à temps continu et à valeurs dans \mathbb{R} tel qu'on ait l'égalité en loi

$$\left(\frac{1}{n} X_n(\mathcal{N}_n(t)) : t \geq 0 \right) \stackrel{(d)}{=} \left(\exp(L_n(\tau_n(t))) : t \geq 0 \right),$$

où τ_n est un changement de temps obtenu à partir de L_n « à la Lamperti ». Pour prouver le Théorème 13, on montre que L_n converge faiblement vers ξ (en utilisant les générateurs infinitésimaux) et que τ_n converge faiblement vers τ . On en déduit le résultat en composant ces deux convergences. Le point crucial est que comme Y reste strictement positif, ces changements des temps n'explorent pas, de sorte que la composition par ce changement de temps inverse ne pose pas de problème.

3.4.2 Régime « récurrent »

Dans le cas où $I_\infty < \infty$, c'est-à-dire lorsque ξ dérive vers $-\infty$ et que Y est absorbé en temps fini en 0, nous n'obtenons un principe d'invariance fonctionnel que pour la chaîne de Markov arrêtée lorsqu'elle s'approche de petites valeurs. Plus précisément, pour tous $n, K \geq 1$ on pose $A_n^{(K)} = \inf\{i \geq 1 : X_n(i) \leq K\}$. On supposera toujours que K est choisi tel que $\mathbb{P}(A_n^{(K)} < \infty) > 0$ pour tout $n \geq 1$ (on peut vérifier qu'un tel entier K existe toujours lorsque les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées et que le processus de Lévy ξ dérive vers $-\infty$). Dans le cas particulier d'une chaîne de Markov irréductible, on peut bien entendu prendre $K = 1$. On définit alors X_n^\dagger comme étant la chaîne de Markov X_n arrêtée à son premier retour dans $\{1, 2, \dots, K\}$. Plus précisément, $X_n^\dagger(\cdot) = X_n(\cdot \wedge A_n^{(K)})$.

Théorème 14 (Theorem 2 dans [27]).

On suppose que les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées et que le processus de Lévy ξ dérive vers $-\infty$. On suppose en outre qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \int_1^\infty e^{\beta x} \Pi_n^*(dx) < \infty. \quad (3.1)$$

Alors la convergence

$$\left(\frac{X_n^\dagger(\lfloor a_n t \rfloor)}{n} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (Y(t) : t \geq 0)$$

a lieu en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Nous disons que le régime est récurrent car alors $\mathbb{P}(A_n^{(K)} < \infty) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$. Il est important de voir que le Théorème 14 ne décrit le comportement de X_n que jusqu'à son entrée dans $\{1, 2, \dots, K\}$.

Le début de la preuve est similaire à celle du Théorème 13, mais ici une difficulté survient quand la chaîne de Markov s'approche des « petites » valeurs pour effectuer le changement de temps inverse, qui explose alors. Pour y faire face, nous utilisons des estimées de type Foster-Lyapounov pour prouver que lorsque la chaîne de Markov part d'un entier K' fixé (avec $K' > K$), alors avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, la chaîne de Markov va atteindre $\{1, 2, \dots, K\}$ avant de dépasser la valeur n , et ceci en un temps plus petit que a_n . Intuitivement, les hypothèses du Théorème 14 impliquent que ξ est « poussé vers le bas », et que $\int_1^\infty e^{\beta x} \Pi(dx) < \infty$, de sorte que X_n/n n'effectue pas de « trop grands » sauts positifs.

Par ailleurs, ces considérations permettent également de démontrer que la convergence $A_n^{(K)}/a_n \rightarrow I_\infty$ a lieu en loi conjointement avec celle du Théorème 14 (voir [27, Theorem 3]).

3.4.3 Régime « récurrent positif »

Soit Ψ l'exposant de Laplace associé à ξ , qui est défini par la formule

$$\Psi(\lambda) = \Phi(-i\lambda) = \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + b\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) \Pi(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\Psi(\lambda)$ est bien défini, on a $\mathbb{E}[e^{\lambda \xi(t)}] = e^{t\Psi(\lambda)}$.

Théorème 15 (Theorem 4 dans [27]).

On suppose que les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées et que le processus de Lévy ξ dérive vers $-\infty$. On suppose en outre qu'il existe $\beta > \gamma$ tel que

$$\Psi(\beta) < 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_n(1)^\beta] < \infty \text{ pour tout entier } n \geq 1. \quad (3.2)$$

Alors la convergence

$$\left(\frac{X_n(\lfloor a_n t \rfloor)}{n} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (Y(t) : t \geq 0)$$

a lieu en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Nous disons que le régime est récurrent car alors $\mathbb{E}[A_n^{(K)}] < \infty$ pour tout entier $n \geq 1$. La différence majeure avec le Théorème 14 est qu'ici la chaîne de Markov X_n n'est plus arrêtée. Le Théorème 15 signifie ainsi qu'avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, X_i prend des valeurs négligeables par rapport à n sur des échelles de temps d'ordre a_n . La preuve du Théorème 15 utilise également des arguments de type Foster-Lyapounov, et montre que la convergence en loi $A_n^{(K)}/a_n \rightarrow I_\infty$ a lieu conjointement avec celle du Théorème 14 (la convergence de certains moments a également lieu, voir [27, Theorem 3]).

3.4.4 Exemples d'application

Mentionnons rapidement quelques situations où les Théorèmes 13, 14, 15 s'appliquent, et nous renvoyons à [27, Sec. 5] pour des détails. Tout d'abord, le Théorème 15 permet de retrouver les résultats de Haas & Miermont [73]. Nos résultats s'appliquent à une large classe de chaînes de Markov à dérive asymptotiquement nulle (cette classe a été étudiée par Lamperti, [94,95,97] et depuis par de nombreux auteurs, voir par exemple [10]), où des processus de Bessel apparaissent à la limite. Nos résultats s'appliquent également pour étudier le nombre de fragments dans un certain processus de fragmentation-coagulation. Enfin, l'application à l'étude de la géométrie de grandes cartes aléatoires à bord sera développée dans la Section 4.3.

3.4.5 Perspectives

De multiples questions restent en suspens compte tenu des résultats précédents. Par exemple, est-ce que la conclusion du Théorème 14 reste vraie si on remplace (3.1) par l'hypothèse que $\mathbb{P}(A_n^{(K)} < \infty) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$? De même, est-ce que la conclusion du Théorème 15 reste vraie si on remplace (3.2) par l'hypothèse que $\mathbb{E}[A_n^{(K)}] < \infty$ pour tout entier $n \geq 1$? Enfin, sous les hypothèses du Théorème 14, que se passe-t-il une fois que X_n atteint $\{1, 2, \dots, K\}$ (voir Fig. 3.2)? Ceci est bien sûr étroitement relié aux extensions récurrentes du processus Y considérées dans [70,128].

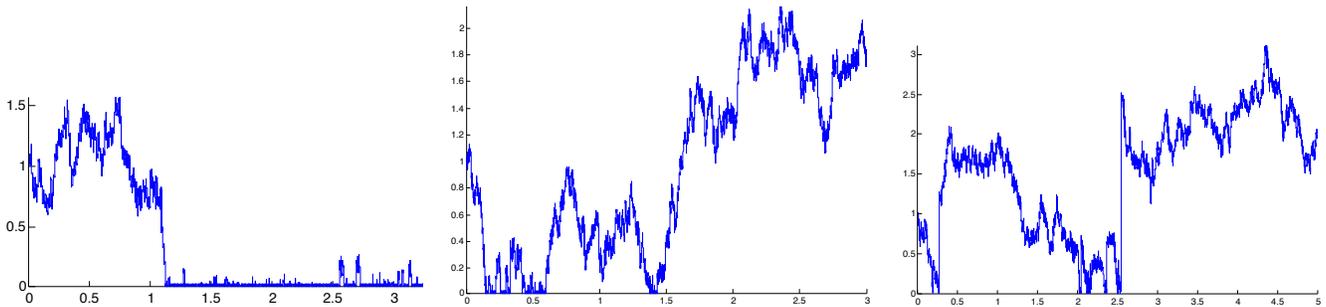


FIGURE 3.2 – De gauche à droite, différents comportements près de la frontière : absorption, réflexion continue et réflexion discontinue.

Géométrie de grandes cartes aléatoires

Contenu de ce chapitre

4.1	Cartes aléatoires	46
4.1.1	Grandes cartes planaires aléatoires	46
4.1.2	Cas particulier des triangulations	48
4.2	Percolation sur l'UIPT [59]	50
4.3	Parcours en profondeur de triangulations à bord [26]	53
4.3.1	Résultat principal	54
4.3.2	Épluchage branchant	56
4.3.3	Étapes principales de la preuve du Théorème 18	58
4.3.4	Perspectives	60

Dans ce chapitre, nous présentons nos contributions [26,59] qui s'inscrivent dans la théorie des grandes cartes planaires aléatoires. Celle-ci est en plein essor depuis une vingtaine d'années, à l'intersection de plusieurs domaines comme la combinatoire, la théorie des probabilités, la mécanique statistique et la physique théorique. Voici un plan rapide de ce chapitre :

Section 4.1. Nous commençons par dresser un bref panorama de différentes directions de recherche dans le domaine des cartes aléatoires, avec quelques motivations.

Section 4.2. Nous étudions la percolation par sites sur la triangulation aléatoire infinie uniforme du plan (UIPT) d'Angel & Schramm [15] et exposons les résultats principaux de l'article [59], écrit en collaboration avec Nicolas Curien. Informellement, il s'agit de calculer l'exposant critique relié à la longueur d'une interface de percolation, et d'identifier la limite d'échelle des bords de grandes composantes connexes. Dans le cas d'une percolation critique, cette limite d'échelle est $\mathcal{L}_{3/2}$, l'arbre à boucles stable d'indice $3/2$ introduit dans la Section 1.3.1. Ainsi, le bord d'une grande composante connexe de percolation critique ressemble intuitivement à des cycles reliés par des points de pincement suivant une structure d'arbre $3/2$ stable. L'outil principal consiste à utiliser une technique chirurgicale due à Borot, Bouttier & Guitter [38,39] ainsi qu'une décomposition arborescente de triangulations à bord non simple.

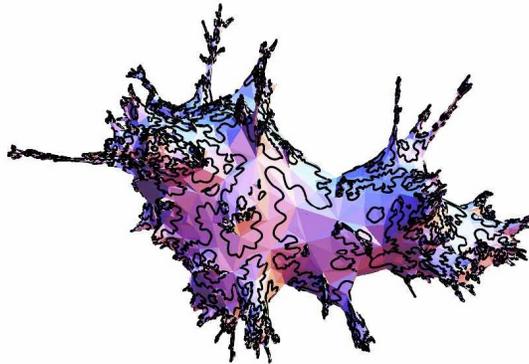


FIGURE 4.1 – Un triangulation percolée par sites, où les différentes interfaces de percolation sont représentées.

Section 4.3. Dans cette partie, nous nous intéressons aux cycles obtenus en coupant à des hauteurs fixes des triangulations aléatoires de Boltzmann à bord simple. Nous y exposons le résultat principal de l'article [26], écrit en collaboration avec Jean Bertoin et Nicolas Curien, qui établit un principe d'invariance fonctionnel pour les périmètres de ces cycles, convenablement mis à l'échelle, lorsque la taille du bord augmente. Le processus limite fait partie de la classe des processus de croissance-fragmentation auto-similaires récemment introduits par Bertoin [23,25]. L'idée principale consiste à utiliser une exploration des triangulations depuis leur bord par épluchage « branchant » et d'utiliser le Théorème 15. Une motivation consiste à pouvoir donner une construction alternative de la carte brownienne à l'aide d'un processus de croissance-fragmentation.

4.1 Cartes aléatoires

4.1.1 Grandes cartes planaires aléatoires

Par définition, une *carte planaire finie* est un plongement propre d'un multigraphe fini connexe (les boucles et arêtes multiples sont autorisées) dans la sphère deux dimensionnelle, considéré à homéomorphismes près de la sphère préservant son orientation. Toutes les cartes considérées seront enracinées, c'est-à-dire qu'elles portent une arête orientée distinguée, appelée *arête racine* (l'enracinement est utile pour briser des symétries). Les *faces* sont les composantes connexes du complémentaire de la carte, et le degré (ou périmètre) d'une face est le nombre de demi-arêtes qui la bordent. Lorsque toutes les faces d'une carte ont degré p , on dit que c'est une p -*angulation* (ou plus simplement *triangulation* dans le cas $p = 3$ et *quadrangulation* dans le cas $p = 4$).

L'étude de l'énumération des cartes a été initiée par Tutte [134] dans les années 60, motivée par le théorème des quatre couleurs. Depuis une vingtaine d'années, l'étude des cartes, et en particulier des cartes aléatoires, est en plein essor, à l'intersection de plusieurs disciplines. En effet, l'énumération bijective de différentes familles de cartes est un domaine très actif en combinatoire; en théorie des probabilités les limites d'échelle de grandes cartes aléatoires sont en particulier étudiées afin de donner un sens à la notion de « surface aléatoire deux dimen-

sionnelle uniforme », connue en physique mathématique sous le nom de « gravité quantique de Liouville deux dimensionnelle » et qui possède de liens étroits avec le chaos multiplicatif gaussien. Nous renvoyons à [99,105,113] pour des détails, références, liens et conjectures concernant l'enchevêtrement de ces sujets.

Nous présentons brièvement quelques grands axes d'étude des cartes planaires aléatoires.

Limites d'échelle. Si M_n désigne une carte planaire aléatoire de « taille » n (nous restons ici assez informels, mais on peut penser par exemple au nombre de sommets, d'arêtes ou de faces), étudier sa limite d'échelle consiste à voir M_n comme un espace métrique compact (en équipant ses sommets de la distance de graphe) et à s'intéresser à la convergence en loi de M_n , convenablement renormalisé, au sens de la distance de Gromov–Hausdorff. Dans le cas des triangulations, ce problème a été formulé par Schramm à l'ICM en 2006 [130], et a été récemment résolu indépendamment par Le Gall et Miermont :

Théorème 4.1.1 (Le Gall [102] pour $p = 3$ ou $p \geq 4$ pair, Miermont [116] pour $p = 4$). *Il existe un espace métrique compact aléatoire (m_∞, D^*) vérifiant la propriété suivante. Soit $M_n^{(p)}$ une carte aléatoire choisie uniformément au hasard parmi toutes les p -angulations à n sommets. Il existe une constante explicite $c_p > 0$ telle que la convergence*

$$c_p \cdot n^{-1/4} \cdot M_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (m_\infty, D^*)$$

ait lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

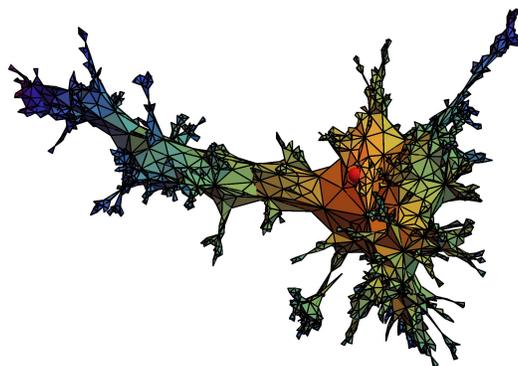


FIGURE 4.2 – Une simulation d'une grande triangulation aléatoire.

Dans le cas des quadrangulations, Chassaing & Schaeffer [47] avaient identifié la croissance en $n^{1/4}$, et Marckert & Mokkadem [108] avaient proposé le nom de carte brownienne pour sa limite d'échelle. L'étude des propriétés de la carte brownienne est également un domaine actif. Il est par exemple connu que, presque sûrement, (m_∞, D^*) est de dimension de Hausdorff 4 [101] et homéomorphe à la sphère [106,115] (voir Fig. 4.2 pour une simulation). Par ailleurs, par passage du discret au continu, le Théorème 4.1.1 implique que la carte brownienne vérifie une propriété d'invariance par réenracinement uniforme, ce qui a permis de montrer que (m_∞, D^*) est la limite d'échelle de diverses autres familles de cartes aléatoires, comme les cartes biparties

à nombre d'arêtes fixé [1], les cartes générales à nombre d'arêtes fixé [33], les triangulations et quadrangulations simples [3] (c'est-à-dire sans boucles ni arêtes multiples), les quadrangulations sans sommet de degré 1 [19].

Depuis, une partie de ces résultats ont été étendus pour des cartes à bord ou en genre supérieur [29,30,32,34].

Mentionnons également qu'une autre classe d'universalité a été identifiée par Le Gall & Miermont [104] pour des cartes aléatoires appelées *cartes stables*, qui sont choisies au hasard avec des poids de Boltzmann favorisant l'apparition de grandes faces (le degré d'une face typique y appartient essentiellement au domaine d'attraction d'une loi stable), et dont le dual possède des propriétés géométriques intéressantes [44].

Limites locales. Au lieu de s'intéresser à la géométrie d'une grande carte aléatoire dans sa « globalité », il peut être pertinent de ne regarder qu'à horizon fini de la racine. Plus précisément, si M est une carte et si pour tout entier $r \geq 0$ on note $B_r(M)$ la carte formée par toutes les faces de M qui ont au moins un sommet à distance de graphe au plus $r - 1$ de l'origine de l'arête racine de M . Angel & Schramm [15] ont prouvé qu'il existe une triangulation aléatoire infinie du plan T_∞ (abrégé en UIPT) telle que si T_n est une carte aléatoire choisie uniformément parmi toutes les triangulations à n sommets, alors pour tout entier $r \geq 1$,

$$B_r(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} B_r(T_\infty). \quad (4.1)$$

On dit que T_∞ est la limite locale de T_n (en toute rigueur, pour le résultat d'Angel & Schramm il faut se restreindre aux triangulations qui n'ont pas de boucles). Cette convergence a été étendue par Krikun [92] pour les quadrangulations, par Björnberg & Stefánsson [36] pour les cartes aléatoires biparties de Boltzmann et par Stephenson [131] dans le cas général des cartes aléatoires de Boltzmann.

On peut donc voir l'UIPT comme un réseau infini aléatoire, et étudier sa géométrie. Mentionnons par exemple le résultat frappant de Gurel-Gurevich & Nachmias [72], qui prouvent que T_∞ est presque sûrement récurrent pour la marche aléatoire simple.

Principales techniques. Pour étudier les limites d'échelle, de multiples bijections entre cartes et objets plus simples jouent un rôle clé, voir par exemple [40,47,50] pour des bijections entre cartes et arbres étiquetés, et [71] pour un aperçu d'autres types de bijections entre cartes et arbres bourgeonnants. Pour étudier les limites locales de cartes aléatoires, l'épluchage, introduit dans [12,137] (voir aussi [43] pour une variante), joue également un rôle crucial. L'épluchage permet essentiellement d'explorer de manière markovienne une grande carte aléatoire, en découvrant ses faces une à une de manière algorithmique. Il s'est imposé comme un outil important pour étudier la géométrie de grandes cartes aléatoires, voir par exemple [11–13, 20,52,60,112,126]. L'épluchage a aussi permis de définir des cartes aléatoires « hyperboliques » [14,53], et a été une inspiration pour l'introduction du QLE [117].

4.1.2 Cas particulier des triangulations

Comme nos travaux [26,59] s'intéressent principalement aux grandes triangulations (éventuellement à bord), nous présentons ici quelques éléments bien connus qui concernent leur

énumération.

Pour $p \geq 1$, une *triangulation du p -gone* est par définition une carte planaire (finie ou infinie) dont toutes les faces sont des triangles, sauf éventuellement celle à la droite de l'arête racine, appelée face externe, qui est une face simple (sans points de pincement) de périmètre p . On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes. Donnons maintenant quelques résultats concernant leur énumération qui jouent un rôle important dans les travaux [26,59] (voir [60, Section 6.1] et [93] pour des preuves). Tout d'abord, pour $n \geq 0, p \geq 1$ avec $(n, p) \neq (0, 1)$:

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n! (2p+n-1)!!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}, \quad (4.2)$$

où

$$C(p) = \frac{3^{p-2} p(2p)!}{4\sqrt{2\pi} (p!)^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{36\pi\sqrt{2}} \sqrt{p} 12^p.$$

On peut remarquer que $\#\mathcal{T}_{0,1} = 0$. D'autre part, pour $(n, p) = (0, 2)$, la formule exacte (4.2) donne $\#\mathcal{T}_{0,2} = 1$. Ceci est correct à condition de décréter que, par convention, le seul élément de $\mathcal{T}_{0,2}$ est la carte planaire enracinée qui consiste d'une seule arête orientée entre deux sommets, qu'on voit comme triangulation du 2-gone. Cette carte particulière est appelée triangulation triviale. Par ailleurs, il existe une bijection naturelle entre les triangulations à n sommets et les triangulations du 1-gone avec $n-1$ sommets internes (qui consiste essentiellement à dupliquer l'arête racine, voir [93, Section 1.3]). Dans la suite, on pourra donc identifier les triangulations avec les des triangulations du 1-gone.

L'exposant $5/2$ apparaissant dans (4.2) est typique dans l'énumération des cartes planaires. En particulier,

$$Z(p) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12\sqrt{3}} \right)^n \#\mathcal{T}_{n,p} < \infty, \quad p \geq 1.$$

L'expression de $Z(p)$ est également explicite. En effet, $Z(p) = \frac{6^p (2p-5)!!}{8\sqrt{3} p!}$ si $p \geq 2$ et $Z(1) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. De plus,

$$\sum_{p=0}^{\infty} Z(p+1) x^p = \frac{1}{2} + \frac{(1-12x)^{3/2} - 1}{24\sqrt{3}x}, \quad x \in [0, 1/12]. \quad (4.3)$$

Triangulations aléatoires du p -gone. Pour $p \geq 1$, la loi de Boltzmann (critique) du p -gone (aussi appelée distribution libre dans [15]) est par définition la mesure de probabilité sur l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n,p}$ qui assigne une probabilité $(12\sqrt{3})^{-n} Z(p)^{-1}$ à chaque triangulation de $\mathcal{T}_{n,p}$. Ainsi, la quantité $Z(p)$ peut être vue comme la fonction de partition associée. Par ailleurs, comme les triangulations du 1-gone sont en bijection avec les triangulations planaires, la loi de Boltzmann du 1-gone se transporte en une loi de Boltzmann sur les triangulation planaires. De manière équivalente, cette mesure de probabilité assigne une masse $(12\sqrt{3})^{1-n} Z(1)^{-1}$ à chaque triangulation planaire avec n sommets.

Il est également possible de définir l'équivalent de l'UIPT pour des triangulations du p -gone. Plus précisément, pour tout $p \geq 1$, il existe une carte aléatoire infinie $T_{\infty}^{(p)}$ telle que si $T_n^{(p)}$

est une carte aléatoire choisie uniformément au hasard dans $\mathcal{T}_{n,p}$, alors la convergence

$$\mathbb{T}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{T}_\infty^{(p)}$$

a lieu en loi pour la topologie locale. La carte aléatoire infinie $\mathbb{T}_\infty^{(p)}$ est appelée UIPT du p -gone. Comme précédemment, pour $p = 1$, $\mathbb{T}_\infty^{(1)}$ peut être vue comme l'UIPT introduite précédemment.

Rigidité. Un des avantages à travailler avec des triangulations réside dans leur rigidité. Pour énoncer cette propriété, nous avons d'abord besoin de définir la notion de triangulation à trous. Par définition, *une triangulation à trous* est une carte où toutes les faces sont des triangles, sauf éventuellement la face externe (celle située immédiatement à droite de l'arête racine) et d'autres faces distinguées (possiblement aucune), appelées *trous*, et dont les bords sont des cycles simples qui n'ont pas d'arêtes en commun (mais peuvent avoir des sommets en commun, ainsi que des arêtes en commun avec la face externe). Par convention, la face externe n'est pas un trou. Les bords des trous d'une triangulation à trous sont appelés *cycles* et on parlera indifféremment de la *longueur* ou du *périmètre* d'un cycle. Implicitement, une arête orientée est distinguée sur chaque cycle, ce qui permet de coller une triangulation à trous h dont la face externe a périmètre p à l'intérieur d'un cycle \mathcal{C} de périmètre p de manière canonique en collant la face externe de h sur \mathcal{C} en identifiant leurs racines.

Si h et h' sont deux triangulations à trous, on dit que h est une *sous-triangulation* de h' , et on note $h \subset h'$, si h' peut être obtenue à partir de h en collant des triangulations à trous à l'intérieur de certains trous de h (avec la convention que coller la triangulation triviale à l'intérieur d'un 2-gone revient à refermer le 2-gone). On parlera de manière équivalente de « collage » ou de « remplissage ».

Il est facile de voir que deux manières différentes de remplir les trous d'une triangulation à trous (par d'autres triangulations à trous) donne toujours des triangulations à trous différentes (voir [15, Définition 4.7]). Ainsi, si h et h' sont deux triangulations à trous telles que $h \subset h'$, alors h' est obtenu en remplissant certains trous de h de manière unique. On dit que les triangulations à trous sont *rigides*.

4.2 Percolation sur l'UIPT [59]

Dans l'article [59], écrit en collaboration avec Nicolas Curien, nous nous intéressons à la géométrie des bords de composantes connexes de percolation par sites sur l'UIPT. Une motivation provient du fait qu'une manière de comprendre la structure d'un graphe aléatoire consiste à l'étudier décoré par un modèle de physique statistique (par exemple une marche aléatoire auto-évitante, un modèle de percolation, un modèle d'Ising, un modèle de Potts, etc.). En gravité quantique, on parle de couplage entre la gravité (matérialisée par la surface, ou une carte dans notre cas) et la matière (matérialisée par le modèle de physique statistique).

Plus précisément, conditionnellement à l'UIPT, on considère une percolation par sites en coloriant ses sommets indépendamment en blanc avec probabilité $\alpha \in (0, 1)$ et en noir avec probabilité $1 - \alpha$. Ce modèle a été étudié par Angel [12], qui a en particulier prouvé que presque sûrement (en l'aléa de l'UIPT), le paramètre critique vaut $\alpha_c = 1/2$ en utilisant l'exploration par

épluchage de l'UIPT (voir aussi [13,52,112,126] pour d'autres travaux qui étudient différents modèles de percolation sur des cartes aléatoires en utilisant l'épluchage).

On conditionnera toujours l'arête racine de l'UIPT à être de la forme $\circ \rightarrow \bullet$, ce qui permet de considérer l'interface de percolation passant à travers la racine. La composante connexe (blanche) de la racine est par définition l'ensemble de tous les sommets blancs (et des arêtes qui les relient) auxquels on peut arriver depuis l'origine de l'arête racine en n'empruntant que des sommets blancs. On note \mathcal{H}_α° sa boule complétée, qui est obtenu en complétant ses « trous », à l'exception de celui qui contient la cible de l'arête racine (voir Fig. 4.3). Ce dernier trou est appelé l'extérieur de la composante connexe de la racine. Finalement, on note $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$ le bord de \mathcal{H}_α° , qui est par définition le graphe formé par les sommets et arêtes de \mathcal{H}_α° adjacents à son extérieur, voir Fig. 4.3 (ainsi, $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$ est formé de cycles discrets reliés par des points de pincement). Le périmètre (ou longueur) de $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$, noté $\#\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$, est le nombre de demi-arêtes de $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$ appartenant à son extérieur. Angel [12] a prouvé que pour tout $\alpha \in (0, 1)$, le périmètre de $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$ est toujours fini presque sûrement (intuitivement, s'il était infini, cela impliquerait la coexistence d'une composante connexe blanche et d'une composante connexe noire, ce qui n'est pas possible).

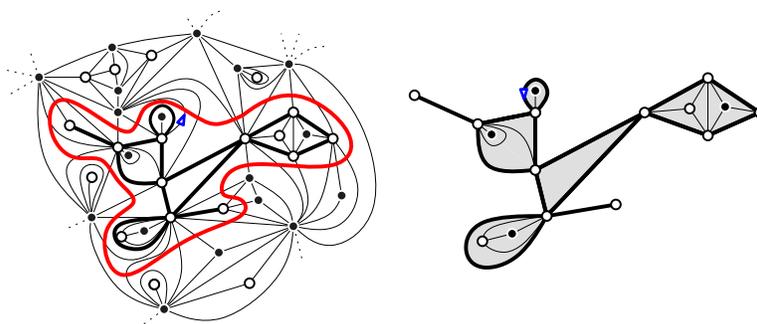


FIGURE 4.3 – À gauche, une partie de l'UIPT avec une percolation par sites, avec une représentation de l'interface de percolation traversant l'arête racine ainsi que la boule complétée de la composante connexe de la racine. À droite, le bord de cette boule complétée est représenté en gras et a pour périmètre 16.

Une des contributions de [59] est d'obtenir un équivalent asymptotique explicite de la probabilité que l'interface de percolation traversant l'arête racine ait un grand périmètre fixé dans le cas critique.

Théorème 16 (Theorem 1.1. dans [59]).

Pour $\alpha = \alpha_c = 1/2$, on a

$$\mathbb{P}(\#\partial\mathcal{H}_{1/2}^\circ = n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2 \cdot |\Gamma(-2/3)|^3} \cdot n^{-4/3},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

L'idée principale consiste à utiliser une opération chirurgicale inspirée de Borot, Bouttier & Guitter [38,39], qui permet de représenter l'UIPT comme deux triangulations à bords non simples, l'une avec des sommets noirs sur le bord et l'autre avec des sommets blancs sur le bord, collés ensemble grâce à un « collier » (voir Fig. 4.4).

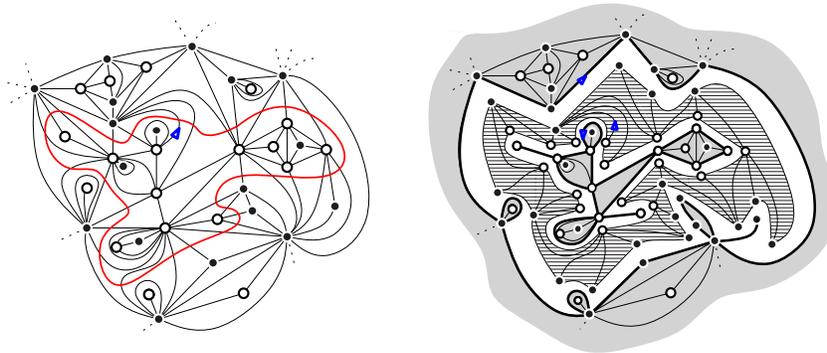


FIGURE 4.4 – À gauche, une partie de l'UIPT avec une percolation par sites, où est représentée l'interface de percolation traversant l'arête racine. À droite, les deux triangulations à bords non simples (représentées en gris) sont collées ensemble grâce au collier (représenté en hachuré).

Nous utilisons ensuite une représentation arborescente des composantes 2-connexes de $\partial\mathcal{H}_a^\circ$ (voir Fig. 4.5) en identifiant la loi de l'arbre dual de $\partial\mathcal{H}_a^\circ$ comme étant celle d'un loi d'un BGW arbre à deux types. Ici, les formules explicites des fonctions génératrices de la Section 4.1.2, et en particulier (4.3), jouent un rôle crucial. Pour étudier cet arbre à deux types, nous utilisons une bijection due à Janson & Stefánsson [77] qui nous permet de nous ramener à l'étude d'un BGW arbre à un type.

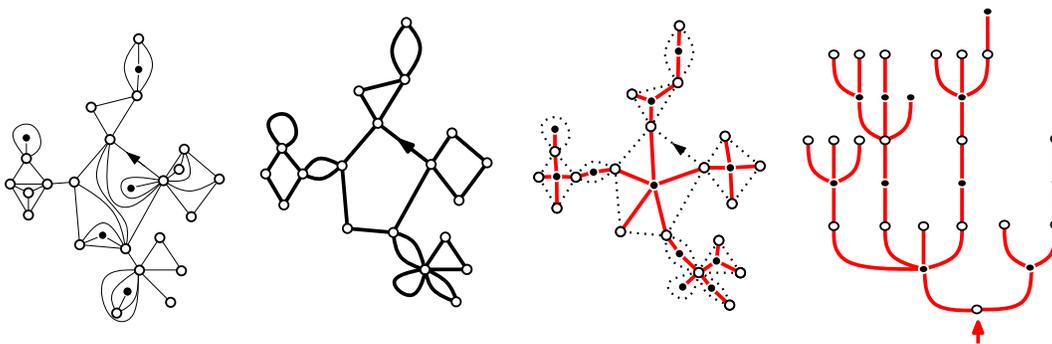


FIGURE 4.5 – De gauche à droite : une triangulation à bord non simple, son bord et son arbre dual à deux types.

Cette approche nous donne également la possibilité de comprendre la structure probabiliste du bord $\partial\mathcal{H}_a^\circ$ de la composante connexe de l'origine et d'identifier ses limites d'échelle vue comme espace métrique compact (pour la topologie de Gromov–Hausdorff) lorsque son

périmètre tend vers l'infini. En particulier, dans le cas critique $\alpha = 1/2$, cette limite d'échelle est $\mathcal{L}_{3/2}$, l'arbre à boucles stable d'indice $3/2$ introduit dans la Section 1.3.1. Dans le cas sous-critique $\alpha < 1/2$, la limite est un multiple de l'arbre brownien d'Aldous \mathcal{T}_e , et dans le cas sur-critique $\alpha > 1/2$ la limite est un multiple du cercle unité $\mathcal{C}_1 := \frac{1}{2\pi} \cdot \mathbb{S}_1$.

Pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et $n \geq 1$, on note $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ(n)$ le bord $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ(n)$, conditionnellement à ce que \mathcal{H}_α° soit fini et à ce que le périmètre de $\partial\mathcal{H}_\alpha^\circ$ soit n .

Théorème 17 (Theorem 1.2. dans [59]).

Il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que les convergences suivantes aient lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff :

$$(i) \quad \text{si } 1/2 < \alpha < 1, \quad n^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_\alpha^\circ(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} C_\alpha \cdot \mathcal{C}_1,$$

$$(ii) \quad \text{si } \alpha = \alpha_c = 1/2, \quad n^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_\alpha^\circ(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$(iii) \quad \text{si } 0 < \alpha < 1/2, \quad n^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_\alpha^\circ(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} C_\alpha \cdot \mathcal{T}_e.$$

Mentionnons que les constantes C_α sont explicites (ceci provient du fait que les fonctions génératrices des BGW arbres en jeu sont explicites grâce aux formules explicites de la Section 4.1.2); en particulier

$$C_\alpha \underset{\alpha \downarrow 1/2}{\sim} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad C_\alpha \underset{\alpha \uparrow 1/2}{\sim} \frac{3^{3/4}}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^{-1/2}.$$

Perspectives. On pourrait s'intéresser aux différentes limites d'échelle possibles pour $\partial\mathcal{H}_{\alpha_n}^\circ(n)$ lorsque α dépend de n et $\alpha_n \rightarrow \alpha_c$. Dans une autre direction, il serait intéressant d'étendre le point (ii) à d'autres modèles de boucles critiques (comme le modèle $O(n)$, voir [59, Sec. 5.3], ou le modèle FK [22]).

4.3 Parcours en profondeur de triangulations à bord [26]

Soit t une triangulation à bord. La hauteur d'un sommet de t et sa distance de graphe au bord de t . Pour tout entier $r \geq 0$, on note $B_r(t)$ la boule de rayon r de t , qui est la triangulation à trous obtenue en gardant toutes les faces de t qui ont au moins un sommet de hauteur au plus $r - 1$ dans t , avec cependant une opération additionnelle : si une arête relie deux sommets de hauteur r qui n'appartiennent pas à un même cycle, nous la dédoublons pour garder un 2-gone à l'intérieur (voir Fig. 4.6 pour un exemple). On rappelle que les cycles d'une triangulation à trous sont les bords de ses trous.

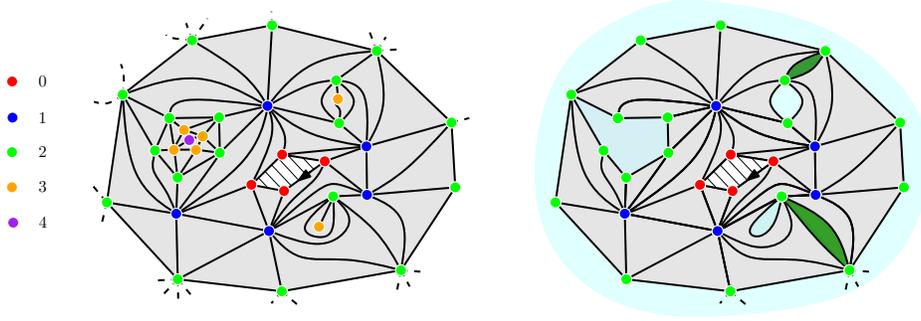


FIGURE 4.6 – Exemple d’une triangulation du 4-gone (la face externe étant hachurée) avec sa boule de rayon 2. Ici, les arêtes reliant deux sommets à hauteur 2 qui n’appartiennent pas au même cycle sont dédoublées en un 2-gone (en vert foncé).

Soit $T^{(p)}$ une triangulation aléatoire de Boltzmann du p -gone (cette loi a été introduite à la fin de la Section 4.1.2). L’article [26], écrit en collaboration avec Jean Bertoin et Nicolas Curien, s’intéresse aux longueurs des cycles de $B_r(T^{(p)})$ rangés dans l’ordre décroissant, qu’on note

$$\mathbf{L}^{(p)}(r) := \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right),$$

et prouve un principe d’invariance fonctionnelle lorsque $p \rightarrow \infty$ pour le processus $\mathbf{L}^{(p)} = (\mathbf{L}^{(p)}(r), r \geq 0)$ convenablement mis à l’échelle, dans l’espace

$$\ell_3^\downarrow := \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^3 < \infty \right\}$$

des suites décroissantes de cube sommable.

4.3.1 Résultat principal

Nous commençons par introduire plusieurs notations qui vont permettre de décrire le processus limite. Pour tout $q \geq 0$, on pose

$$\Psi(q) := -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx.$$

Le changement de variable $x = \exp(y)$ dans cette intégrale permet de voir Ψ comme l’exposant de Laplace d’un processus de Lévy spectralement négatif ξ . Comme $\Psi'(0) = \mathbb{E}[\xi(1)] < 0$, ξ dérive vers $-\infty$. En utilisant la transformation de Lamperti, on construit alors un processus de Markov auto-similaire comme dans la partie 3.2 avec $\gamma = 1/2$; plus précisément, on pose

$$I_\infty = \int_0^\infty e^{\xi(s)/2} ds.$$

Comme ξ dérive vers $-\infty$, on a $I_\infty < \infty$ p.s. On définit ensuite

$$\tau(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u e^{\xi(s)/2} ds > t \right\}, \quad t \geq 0$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, c'est-à-dire $\tau(t) = \infty$ pour $t \geq I_\infty$. On pose finalement

$$X(t) := \exp(\xi(\tau(t))), \quad t \geq 0,$$

(avec la convention $\exp(\xi(\infty)) = 0$).

On utilise X pour définir un processus de croissance-fragmentation auto-similaire à dislocations binaires au sens de [23]. Informellement, on voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique d'âge t , et on considère l'évolution suivante. Au temps $t = 0$, on commence avec une seule cellule de taille $X(0) = 1$ et dont la taille évolue suivant le processus X . On interprète chaque saut négatif de X comme une division de la cellule, en ce sens que si $\Delta X(t) := X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère et en une cellule fille. Après cette division, la cellule mère a taille $X(t)$ et la cellule fille a taille y , et l'évolution de la taille de la cellule fille est gouvernée par la loi du même processus auto-similaire X (mais issu bien entendu de y) de manière indépendante de tous les autres processus d'évolution. On itère cette construction pour les petits-enfants, petits-petits-enfants et ainsi de suite.

En utilisant les résultats de [23], il est possible de vérifier qu'alors la famille des tailles des cellules présentes dans le système à l'instant t est de cube sommable (et même dans ℓ^q pour tout $q > 3/2$), et peut donc être rangée en une suite décroissante pour obtenir une variable aléatoire à valeurs dans ℓ_3^\downarrow et notée $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots)$. Le processus $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t) : t \geq 0)$ est càdlàg (il est même càdlàg dans ℓ_q^\downarrow pour tout $q > 2$), et est appelé processus de croissance-fragmentation auto-similaire d'indice $-1/2$ (car pour tout $c > 0$, le processus $(c\mathbf{X}(c^{-1/2}t), t \geq 0)$ a la même loi que \mathbf{X} issu de $(c, 0, 0, \dots)$), associé au processus de Lévy spectralement négatif ξ , d'exposant de Laplace Ψ .

Pour citer notre résultat principal, nous introduisons également les constantes

$$t_{\Delta^1} = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi}}, \quad a_{\Delta^1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

En effet, on s'attend à ce que le processus \mathbf{X} soit universel, en ce sens qu'il apparaît que le résultat suivant s'applique à une large classe de cartes aléatoires, avec pour seule différence la constante apparaissant dans le changement de temps, qui dépend du modèle considéré.

On rappelle que $T^{(p)}$ est une triangulation de Boltzmann du p -gone et que $L^{(p)}(r)$ désigne la suite des longueurs des cycles de $B_r(T^{(p)})$ rangés dans l'ordre décroissant.

Théorème 18 (Theorem 1 dans [26]).

La convergence

$$\left(\frac{1}{p} \cdot L^{(p)}(r\sqrt{p}) : r \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathbf{X} \left(\frac{2t_{\Delta^1}}{a_{\Delta^1}} \cdot r \right) : r \geq 0 \right)$$

a lieu en loi dans l'espace des fonctions càdlàg à valeurs dans ℓ_3^\downarrow muni de la topologie J_1 de Skorokhod.

Le processus de croissance-fragmentation X est caractérisé par son indice d'auto-similarité $-1/2$ et par sa fonction malthusienne

$$\kappa(q) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{\Gamma(q - \frac{3}{2})}{\Gamma(q - 3)}, \quad q > 3/2.$$

4.3.2 Épluchage branchant

Dans la littérature, l'épluchage de l'UIPT est généralement vu comme une suite de triangulations avec éventuellement un seul trou, partant de la racine de l'UIPT, et obtenus successivement par ajout de faces adjacentes à la frontière de la région explorée, mais en « complétant » les trous qui ne contiennent pas l'infini de l'UIPT (on sait que l'UIPT n'a qu'un seul bout).

Cependant, dans notre cas, nous travaillons avec des triangulations finies et ne complétons pas les trous, de sorte qu'à chaque étape, il est potentiellement possible d'ajouter une face adjacente à la frontière de plusieurs trous. Pour cette raison, nous appelons cette exploration un *processus d'épluchage branchant*. Comme celui-ci diffère de l'épluchage usuel de l'UIPT, nous donnons ici quelques précisions supplémentaires concernant sa définition.

Si \mathbf{h} est une triangulation à trous, on note $\mathcal{C}(\mathbf{h})$ l'union de ses cycles. Un processus d'épluchage branchant dépend d'une fonction \mathcal{A} , appelée *algorithme d'épluchage*, qui associe à chaque triangulation finie à trous \mathbf{h} une arête de $\mathcal{C}(\mathbf{h}) \cup \{\dagger\}$, où \dagger est un point cimetièrre qui représente l'arrêt de l'épluchage. En particulier, si \mathbf{h} n'a pas de trous (et alors \mathbf{h} est une triangulation du p -gone), on a $\mathcal{A}(\mathbf{h}) = \dagger$.

Si $\mathbf{h} \subset \mathbf{t}$ est une triangulation à trous et si e est une arête appartenant à un cycle \mathcal{C} de \mathbf{h} , la triangulation à trous \mathbf{h}_e obtenue en épluchant l'arête e est définie comme suit. Tout d'abord, soit $\mathbf{t}(\mathcal{C})$ la triangulation à bord collée à l'intérieur de \mathcal{C} dans \mathbf{t} .

- *Événement V* : La triangulation $\mathbf{t}(\mathcal{C})$ est la triangulation triviale (ce qui ne peut arriver que pour $p = 2$). Alors \mathbf{h}_e est obtenue à partir de \mathbf{h} en fermant ce 2-cycle (voir l'illustration tout à droite de Fig. 4.7).

Sinon, soit Δ_e le triangle adjacent à e dans $\mathbf{t}(\mathcal{C})$. Alors \mathbf{h}_e est essentiellement obtenue à partir de \mathbf{h} en « collant » Δ_e sur e à l'intérieur du trou délimité \mathcal{C} . Plus précisément, si p est le périmètre de \mathcal{C} , deux cas de figure se présentent :

- *Événement C* : le troisième sommet de Δ_e n'appartient pas au cycle \mathcal{C} . Alors \mathbf{h}_e est obtenue à partir de \mathbf{h} en collant un nouveau triangle sur e (voir l'illustration tout à gauche de Fig. 4.7).
- *Événement G_k* : le troisième sommet W_e de Δ_e appartient au cycle \mathcal{C} ; soit alors $k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ le nombre d'arêtes entre W_e et e (dans le sens horaire). Alors \mathbf{h}_e est obtenue à partir de \mathbf{h} en collant un nouveau triangle sur e et en identifiant son troisième sommet *uniquement* avec W_e (voir l'illustration au milieu de Fig. 4.7).

Sur l'événement G_k , il est important que les deux autres arêtes du nouveau triangle ne soient *jamais* collés à une arête de \mathcal{C} , de sorte que le cycle \mathcal{C} de \mathbf{h} de périmètre p soit toujours coupé en deux cycles de périmètres $k + 1$ et $p - k$. En particulier, lorsque $k = 0$ ou $k = p - 1$, une boucle est créée, et lorsque $k = 1$ ou $k = p - 2$, un cycle de longueur 2 est créé (qui peut en fait être vide dans \mathbf{t}).

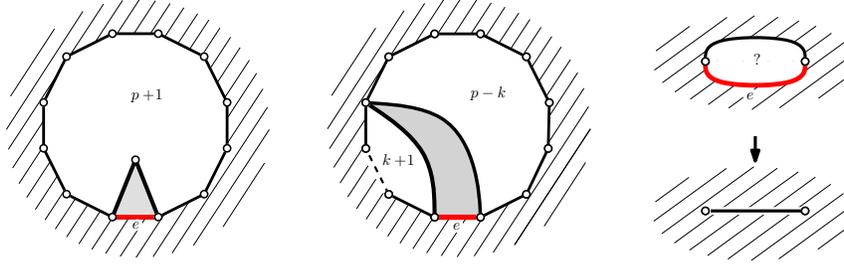


FIGURE 4.7 – De gauche à droite : illustration des trois événements possibles C , G_k (dans ce cas $k + 1$ et $p - k$ représentent les périmètres des deux nouveaux cycles) et V lors de l'épluchage d'une arête.

Formellement, si t est une triangulation (finie ou infinie) à bord, le processus d'exploration branchant de t avec l'algorithme \mathcal{A} est par définition la suite de triangulations à trous

$$\mathcal{H}_0(t) \subset \mathcal{H}_1(t) \subset \dots \subset \mathcal{H}_n(t) \subset \dots \subset t,$$

obtenue comme suit :

- la triangulation à trous $\mathcal{H}_0(t)$ est formée du bord de t . Autrement dit, c'est un cycle simple de même périmètre que le bord de t , avec une arête orientée distinguée avec la face externe à sa droite et un trou à sa gauche.
- Pour tout $i \geq 0$, si $\mathcal{A}(\mathcal{H}_i(t)) \neq \dagger$, alors la triangulation $\mathcal{H}_{i+1}(t)$ est obtenue à partir de $\mathcal{H}_i(t)$ en épluchant l'arête $\mathcal{A}(\mathcal{H}_i(t))$. Si $\mathcal{A}(\mathcal{H}_i(t)) = \dagger$, alors $\mathcal{H}_{i+1}(t) = \mathcal{H}_i(t)$ et le processus s'arrête.

Le résultat qui suit décrit la loi de la triangulation à trous obtenue après n étapes d'épluchage en partant d'une triangulation de Boltzmann du p -gone et de l'UIPT du p -gone, et est valable pour n'importe quel algorithme d'épluchage \mathcal{A} . Dans l'énoncé suivant, on travaille sur l'espace canonique Ω de toutes les triangulations (finies ou infinies) à trous muni de la tribu borélienne de la topologie locale, et les notations $\mathbb{P}^{(p)}$ et $\mathbb{P}_{\infty}^{(p)}$ désignent respectivement la loi d'une triangulation de Boltzmann du p -gone et la loi de l'UIPT du p -gone. Finalement, rappelons que les constantes $C(p)$ et $Z(p)$ ont été introduites dans la Section 4.1.2.

Proposition 19 (Proposition 3 dans [26]).

Soient $p \geq 1$ et $n \geq 0$. On considère une triangulation à trous \mathbf{h} telle qu'il existe une triangulation \mathbf{t} du p -gone avec $\mathcal{H}_n(\mathbf{t}) = \mathbf{h}$. Notons $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ les périmètres des cycles de \mathbf{h} , et soit N le nombre de sommets internes de \mathbf{h} (c'est-à-dire non adjacents à la face externe). Alors

$$\mathbb{P}^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) = \frac{(12\sqrt{3})^{-N}}{Z(p)} \prod_{i=1}^k Z(\ell_i)$$

et

$$\mathbb{P}_{\infty}^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) = \frac{(12\sqrt{3})^{-N}}{C(p)} \left(\prod_{i=1}^k Z(\ell_i) \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{C(\ell_j)}{Z(\ell_j)} \right).$$

Ce résultat se prouve simplement en utilisant le comportement asymptotique des quantités introduites dans la Section 4.1.2. La loi des triangulations remplissant les trous de \mathcal{H}_n est également connue : sous $\mathbb{P}^{(p)}$ et conditionnellement à $\{\mathcal{H}_n = \mathbf{h}\}$, les triangulations qui remplissent les trous de \mathbf{h} dans \mathbf{t} sont des triangulations de Boltzmann à bord. De plus, sous $\mathbb{P}_{\infty}^{(p)}$ et conditionnellement à $\{\mathcal{H}_n = \mathbf{h}\}$, les triangulations qui remplissent les trous de \mathbf{h} à l'intérieur de \mathbf{t} sont indépendantes et sont des triangulations de Boltzmann à bord, à l'exception du J -ième trou qui contient l'UIPT d'un ℓ_J -gone, où l'indice J est choisi indépendamment au hasard proportionnellement à $C(\ell.) / Z(\ell.)$.

La Proposition 4.3.2 permet d'identifier les valeurs des probabilités des événements V, C, G_k (voir [26, Sec. 2.4]), appelées aussi probabilités de transition du processus d'épluchage.

Une autre conséquence intéressante de la Proposition est que si \mathcal{F}_n la filtration engendrée par $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_n$ (sur l'ensemble triangulations à trous du p -gone), et si $(\ell_1(n), \dots, \ell_i(n), \dots)$ est la suite des périmètres des cycles de \mathcal{H}_n (énumérés dans un ordre quelconque), alors, sous $\mathbb{P}^{(p)}$,

$$M_n = \sum_{i \geq 1} \frac{C(\ell_i(n))}{Z(\ell_i(n))} \quad (n \geq 0) \tag{4.4}$$

est une martingale positive relativement à la filtration (\mathcal{F}_n) . De plus, cette martingale peut être vue comme la dérivée de Radon–Nikodym du processus d'exploration par épluchage de l'UIPT du p -gone par rapport à la même exploration d'une triangulation de Boltzmann du p -gone (ceci est très similaire au fait qu'un BGW arbre critique conditionné à survivre peut être localement vu comme la loi d'un BGW critique biaisé par la taille de ses générations). En pratique, cette vision peut être utile pour transférer des calculs concernant les triangulations de Boltzmann du p -gone à des calculs similaires sur l'UIPT du p -gone.

4.3.3 Étapes principales de la preuve du Théorème 18

La preuve du Théorème 18 se fait essentiellement en trois grandes étapes que nous décrivons maintenant, et nous renvoyons à [26] pour les détails.

Limite d'échelle de l'évolution du localement plus grand cycle. Lors d'un épluchage branchant de l'UIPT du p -gone, un cycle joue un rôle privilégié, à savoir celui qui sépare la face externe de l'infini. L'évolution de son périmètre et sa limite d'échelle ont été étudiés en détails dans [60]. Cependant, dans le cas des triangulations de Boltzmann du p -gone, aucun cycle ne joue de rôle privilégié. Il est néanmoins possible de suivre l'évolution d'un cycle distingué en suivant le localement plus grand cycle à chaque étape d'épluchage. Plus précisément, considérons un processus d'épluchage branchant d'une triangulation du p -gone. Au début, le cycle distingué $\mathcal{C}^*(0)$ est le cycle de longueur p . Ensuite, par récurrence, si le cycle distingué a changé n fois, on attend que le processus d'exploration épluche une arête appartenant à $\mathcal{C}^*(n)$. Le cycle $\mathcal{C}^*(n)$ donne alors naissance soit à un nouveau cycle, soit à deux nouveaux cycles. Dans le premier cas, $\mathcal{C}^*(n+1)$ est le nouveau cycle, et dans le deuxième cas, $\mathcal{C}^*(n+1)$ est le plus long des deux nouveaux cycles (avec une convention déterministe pour choisir si les longueurs sont les mêmes). Nous renvoyons à [26, Sec. 2.5] pour une définition formelle.

Si $\tilde{L}(n)$ désigne la longueur de $\mathcal{C}^*(n)$, la Proposition 4.3.2 permet de voir que sous $\mathbb{P}^{(p)}$, $(\tilde{L}(n) : n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, issue de p et absorbée en 0, avec des probabilités de transitions explicites faisant intervenir les constantes $(Z(k))$. On peut alors vérifier par le calcul que les hypothèses du Théorème 15 sont satisfaites, ce qui permet d'obtenir un théorème d'invariance fonctionnel pour $(\tilde{L}(n) : n \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^{(p)}$.

Insistons sur le fait que ceci est valable pour des algorithmes d'épluchage très généraux.

Épluchage par couches. Pour obtenir une information sur les cycles de $(B_r(T^{(p)}) : r \geq 0)$, nous choisissons un algorithme d'épluchage particulier appelé *épluchage par couches*. Celui-ci vérifie la propriété que si t est une triangulation du p -gone, la suite de triangulations à trous $(B_r(T^{(p)}) : r \geq 0)$ peut être obtenue à partir de la suite des triangulations à trous obtenus à partir de t par épluchage par couches le long d'une sous-suite prise à des temps d'arrêt (voir [26] pour une définition formelle). En adaptant les arguments de [60] (qui, très grossièrement, permettent d'estimer le temps mis par l'exploration à explorer une couche), nous en déduisons un principe d'invariance fonctionnel pour le périmètre du localement plus grand cycle apparaissant dans $(B_r(T^{(p)}) : r \geq 0)$.

Fin de preuve. Il reste à obtenir un principe d'invariance fonctionnel pour tous les cycles apparaissant dans $(B_r(T^{(p)}) : r \geq 0)$, et pas seulement pour celui qui est localement le plus grand. Pour cela, nous utilisons un argument de troncature. Plus précisément, les techniques expliquées précédemment permettent de contrôler l'évolution de tous les périmètres des cycles d'un processus d'exploration branchant où les cycles de périmètre plus petit que εp ne sont pas explorés (on dit qu'ils sont gelés), ce qui fournit un contrôle de la structure de la triangulation $\text{Cut}(T^{(p)}, \varepsilon p)$ obtenue en gardant les faces de $T^{(p)}$ qui ne sont pas séparées de la face externe de $T^{(p)}$ par un cycle de longueur plus petite que εp .

La fin de la preuve du Théorème 18 consiste alors à prouver que les cycles appartenant à $(B_r(T^{(p)}) : r \geq 0)$ mais qui n'apparaissent pas dans $(B_r(\text{Cut}(T^{(p)}, \varepsilon p)) : r \geq 0)$ sont négligeables au sens de la norme ℓ^3 , uniformément en $p \geq 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, la martingale (4.4) joue un rôle crucial.



FIGURE 4.8 – Illustration de l'argument de troncature. Ici les segments horizontaux représentent les cycles de $B_r(T^{(p)})$ lorsque r augmente, et les cycles les plus longs sont les plus foncés. Après troncature, nous ne gardons que les cycles qui ne sont pas séparés de la face externe par un cycle de longueur εp . Les cycles qui ne sont pas gardés sont représentés en rose, et la valeur de ε diminue de gauche à droite.

4.3.4 Perspectives

Il serait tout d'abord très intéressant de reconstruire la carte brownienne à partir du processus de croissance-fragmentation X . Dans un autre genre d'idées, le Théorème 18 rappelle en quelque sorte le processus de fragmentation apparaissant dans la fragmentation par hauteurs de l'arbre brownien d'Aldous [24,135]. Depuis, il a été observé que des processus de fragmentation surviennent de manière similaire pour d'autres familles d'arbres aléatoires (voir par exemple [114]). Dans cette direction, il serait ainsi intéressant d'étendre le Théorème 18 à d'autres familles de cartes aléatoires, voire de surfaces. Un candidat plausible serait le dual des cartes stables de Le Gall & Miermont [104], mais où le processus de croissance-fragmentation pourrait avoir des sauts positifs, traduisant l'existence de « hubs » ou sommets de très grands degrés.

Bibliographie

- [1] ABRAHAM, C. Rescaled bipartite planar maps converge to the Brownian map. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 52, 2 (2016), 575–595.
- [2] ADDARIO-BERRY, L. Tail bounds for the height and width of a random tree with a given degree sequence. *Random Structures Algorithms* 41, 2 (2012), 253–261.
- [3] ADDARIO-BERRY, L., AND ALBENQUE, M. The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulations. *Ann. of Probab.* (à paraître).
- [4] ADDARIO-BERRY, L., DEVROYE, L., AND JANSON, S. Sub-Gaussian tail bounds for the width and height of conditioned Galton-Watson trees. *Ann. Probab.* 41, 2 (2013), 1072–1087.
- [5] ALBENQUE, M., AND MARCKERT, J.-F. Some families of increasing planar maps. *Electron. J. Probab.* 13 (2008), no. 56, 1624–1671.
- [6] ALDOUS, D. The continuum random tree. I. *Ann. Probab.* 19, 1 (1991), 1–28.
- [7] ALDOUS, D. The continuum random tree. II. An overview. In *Stochastic analysis (Durham, 1990)*, vol. 167 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp. 23–70.
- [8] ALDOUS, D. The continuum random tree III. *Ann. Probab.* 21, 1 (1993), 248–289.
- [9] ALDOUS, D. Triangulating the circle, at random. *Amer. Math. Monthly* 101, 3 (1994).
- [10] ALEXANDER, K. S. Excursions and local limit theorems for Bessel-like random walks. *Electron. J. Probab.* 16 (2011), no. 1, 1–44.
- [11] ANGEL, O. Scaling of percolation on infinite planar maps, I. *Preprint available on arxiv, arXiv :0501006.*
- [12] ANGEL, O. Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation. *Geom. Funct. Anal.* 13, 5 (2003), 935–974.
- [13] ANGEL, O., AND CURIEN, N. Percolations on random maps I : Half-plane models. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, 2 (2015), 405–431.
- [14] ANGEL, O., AND RAY, G. Classification of half-planar maps. *Ann. Probab.* 43, 3 (2015), 1315–1349.
- [15] ANGEL, O., AND SCHRAMM, O. Uniform infinite planar triangulation. *Comm. Math. Phys.* 241, 2-3 (2003), 191–213.
- [16] ARIZMENDI, O. Statistics of blocks in k -divisible non-crossing partitions. *Electron. J. Combin.* 19, 2 (2012), Paper 47, 22.

- [17] ARIZMENDI, O., AND VARGAS, C. Products of free random variables and k -divisible non-crossing partitions. *Electron. Commun. Probab.* 17 (2012), no. 11, 1–13.
- [18] BARABÁSI, A.-L., AND ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *Science* 286, 5439 (1999), 509–512.
- [19] BELTRAN, J., AND LE GALL, J.-F. Quadrangulations with no pendant vertices. *Bernoulli* 19, 4 (2013), 1150–1175.
- [20] BENJAMINI, I., AND CURIEN, N. Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation : Subdiffusivity *via* pioneer points. *Geom. Funct. Anal.* 23, 2 (2013), 501–531.
- [21] BENJAMINI, I., AND SCHRAMM, O. KPZ in one dimensional random geometry of multiplicative cascades. *Comm. Math. Phys.* 289, 2 (2009), 653–662.
- [22] BERESTYCKI, N., LASLIER, B., AND GOURAB, R. Critical exponents on Fortuin–Kastelyn weighted planar maps. *Preprint available on arxiv, arXiv :1502.00450*.
- [23] BERTOIN, J. Markovian growth-fragmentation processes. *Bernoulli (à paraître)*.
- [24] BERTOIN, J. Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 38, 3 (2002), 319–340.
- [25] BERTOIN, J. Compensated fragmentation processes and limits of dilated fragmentations. *Ann. Probab.* 44, 2 (2016), 1254–1284.
- [26] BERTOIN, J., CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random planar maps & growth-fragmentations. *Soumis, prépublication disponible sur arxiv, arXiv :1507.02265* (2015).
- [27] BERTOIN, J., AND KORTCHEMSKI, I. Self-similar scaling limits of Markov chains on the positive integers. *Ann. Appl. Probab.* 26, 4 (2016), 2556–2595.
- [28] BERTOIN, J., AND YOR, M. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.* 2 (2005), 191–212.
- [29] BETTINELLI, J. Scaling limits for random quadrangulations of positive genus. *Electron. J. Probab.* 15 (2010), no. 52, 1594–1644.
- [30] BETTINELLI, J. The topology of scaling limits of positive genus random quadrangulations. *Ann. Probab.* 40, 5 (2012), 1897–1944.
- [31] BETTINELLI, J. Scaling limit of random planar quadrangulations with a boundary. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, 2 (2015), 432–477.
- [32] BETTINELLI, J. Geodesics in Brownian surfaces (Brownian maps). *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 52, 2 (2016), 612–646.
- [33] BETTINELLI, J., JACOB, E., AND MIERMONT, G. The scaling limit of uniform random plane maps, *via* the Ambjørn-Budd bijection. *Electron. J. Probab.* 19 (2014), no. 74, 16.
- [34] BETTINELLI, J., AND MIERMONT, G. Compact Brownian surfaces I. Brownian disks. [arXiv:1507.08776](https://arxiv.org/abs/1507.08776) (2015).

-
- [35] BHAMIDI, S., VAN DER HOFSTAD, R., AND SEN, S. The multiplicative coalescent, inhomogeneous continuum random trees, and new universality classes for critical random graphs. *Preprint available on arxiv, <http://arxiv.org/abs/1508.04645>*.
- [36] BJÖRNBERG, J. E., AND STEFÁNSSON, S. Ö. Recurrence of bipartite planar maps. *Electron. J. Probab.* 19 (2014), no. 31, 40.
- [37] BOLLOBÁS, B., RIORDAN, O., SPENCER, J., AND TUSNÁDY, G. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms* 18, 3 (2001), 279–290.
- [38] BOROT, G., BOUTTIER, J., AND GUITTER, E. Loop models on random maps via nested loops : case of domain symmetry breaking and application to the potts model. *J. Phys. A : Math. Theor.* 45, 49 (2012).
- [39] BOROT, G., BOUTTIER, J., AND GUITTER, E. A recursive approach to the $O(N)$ model on random maps via nested loops. *J. Phys. A : Math. Theor.* 45 (2012).
- [40] BOUTTIER, J., DI FRANCESCO, P., AND GUITTER, E. Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.* 11, 1 (2004), Research Paper 69, 27 pp. (electronic).
- [41] BROUTIN, N., AND MARCKERT, J.-F. Asymptotics of trees with a prescribed degree sequence and applications. *Random Structures Algorithms* 44, 3 (2014), 290–316.
- [42] BUBECK, S., MOSSEL, E., AND RÁCZ, M. Z. On the influence of the seed graph in the preferential attachment model. *IEEE Trans. Network Sci. Eng.* 2, 1 (2015), 30–39.
- [43] BUDD, T. The peeling process of infinite Boltzmann planar maps. *Electron. J. Combin.* 23, 1 (2016), Paper 1.28, 37.
- [44] BUDD, T., AND CURIEN, N. Geometry of infinite planar maps with high degrees. *Preprint available on arxiv, arXiv :1602.01328*.
- [45] BURAGO, D., BURAGO, Y., AND IVANOV, S. *A course in metric geometry*, vol. 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [46] CARACENI, A. The Scaling Limit of Random Outerplanar Maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. (à paraître)*.
- [47] CHASSAING, P., AND SCHAEFFER, G. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields* 128, 2 (2004), 161–212.
- [48] CHAUMONT, L. Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables. *Bull. Sci. Math.* 121, 5 (1997), 377–403.
- [49] CHAUMONT, L., KYPRIANOU, A., PARDO, J. C., AND RIVERO, V. Fluctuation theory and exit systems for positive self-similar Markov processes. *Ann. Probab.* 40, 1 (2012), 245–279.
- [50] CORI, R., AND VAUQUELIN, B. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.* 33, 5 (1981), 1023–1042.
- [51] CROYDON, D., AND KUMAGAI, T. Random walks on Galton-Watson trees with infinite variance offspring distribution conditioned to survive. *Electron. J. Probab.* 13 (2008), no. 51, 1419–1441.

- [52] CURIEN, N. A glimpse of the conformal structure of random planar maps. *Comm. Math. Phys.* 333, 3 (2015), 1417–1463.
- [53] CURIEN, N. Planar stochastic hyperbolic triangulations. *Probab. Theory Related Fields* 165, 3-4 (2016), 509–540.
- [54] CURIEN, N., DUQUESNE, T., KORTCHEMSKI, I., AND MANOLESCU, I. Scaling limits and influence of the seed graph in preferential attachment trees. *J. Éc. polytech. Math.* 2 (2015), 1–34.
- [55] CURIEN, N., AND HAAS, B. The stable trees are nested. *Probab. Theory Related Fields* 157, 3-4 (2013), 847–883.
- [56] CURIEN, N., HAAS, B., AND KORTCHEMSKI, I. The CRT is the scaling limit of random dissections. *Random Structures Algorithms* 47, 2 (2015), 304–327.
- [57] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random non-crossing plane configurations : a conditioned Galton-Watson tree approach. *Random Structures Algorithms* 45, 2 (2014), 236–260.
- [58] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Random stable looptrees. *Electron. J. Probab.* 19 (2014), no. 108, 35.
- [59] CURIEN, N., AND KORTCHEMSKI, I. Percolation on random triangulations and stable looptrees. *Probab. Theory Related Fields* 163, 1-2 (2015), 303–337.
- [60] CURIEN, N., AND LE GALL, J.-F. Scaling limits for the peeling process on random maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. (à paraître)* (2014).
- [61] DEUTSCH, E., AND NOY, M. Statistics on non-crossing trees. *Discrete Math.* 254, 1-3 (2002), 75–87.
- [62] DEVROYE, L., FLAJOLET, P., HURTADO, F., AND NOY, M. AND STEIGER, W. Properties of random triangulations and trees. *Discrete Comput. Geom.* 22, 1 (1999).
- [63] DRMOTA, M., DE MIER, A., AND NOY, M. Extremal statistics on non-crossing configurations. *Discrete Math.* 327 (2014), 103–117.
- [64] DUQUESNE, T. A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees. *Ann. Probab.* 31, 2 (2003), 996–1027.
- [65] DUQUESNE, T., AND LE GALL, J.-F. Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, 281 (2002), vi+147.
- [66] DUQUESNE, T., AND WANG, M. Decomposition of Lévy trees along their diameter. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. (à paraître)*.
- [67] EDELMAN, P. H. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discrete Mathematics* 31, 2 (1980), 171 – 180.
- [68] ETHIER, S. N., AND KURTZ, T. G. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

- [69] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [70] FITZSIMMONS, P. J. On the existence of recurrent extensions of self-similar Markov processes. *Electron. Comm. Probab.* 11 (2006), 230–241.
- [71] FUSY, E. Combinatoire des cartes planaires par méta-bijection. *Habilitation thesis, available online.*
- [72] GUREL-GUREVICH, O., AND NACHMIAS, A. Recurrence of planar graph limits. *Ann. of Math. (2)* 177, 2 (2013), 761–781.
- [73] HAAS, B., AND MIERMONT, G. Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains. *Bernoulli* 17, 4 (2011), 1217–1247.
- [74] HAAS, B., AND MIERMONT, G. Scaling limits of Markov branching trees, with applications to Galton-Watson and random unordered trees. *Ann. of Probab.* 40, 6 (2012), 2589–2666.
- [75] JACOD, J., AND SHIRYAEV, A. N. *Limit theorems for stochastic processes*, second ed., vol. 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [76] JANSON, S. Simply generated trees, conditioned Galton-Watson trees, random allocations and condensation. *Probab. Surv.* 9 (2012), 103–252.
- [77] JANSON, S., AND STEFÁNSSON, S. Ö. Scaling limits of random planar maps with a unique large face. *Ann. Probab.* 43, 3 (2015), 1045–1081.
- [78] KENDALL, D. G. The genealogy of genealogy : branching processes before (and after) 1873. *Bull. London Math. Soc.* 7, 3 (1975), 225–253. With a French appendix containing Bienaymé’s paper of 1845.
- [79] KERSTING, G. On the Height Profile of a Conditioned Galton–Watson Tree. *Unpublished manuscript.*
- [80] KORTCHEMSKI, I. Sub-exponential tail bounds for conditioned stable Bienaymé-Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields (à paraître).*
- [81] KORTCHEMSKI, I. Good Sequences, Bijections and Permutations. *Undergrad. Math J.* 6, 2 (2005), 26p.
- [82] KORTCHEMSKI, I. Asymptotic behavior of permutation records. *J. Combin. Theory Ser. A* 116, 6 (2009), 1154–1166.
- [83] KORTCHEMSKI, I. Invariance principles for Galton-Watson trees conditioned on the number of leaves. *Stochastic Process. Appl.* 122, 9 (2012), 3126–3172.
- [84] KORTCHEMSKI, I. A simple proof of Duquesne’s theorem on contour processes of conditioned Galton-Watson trees. In *Séminaire de Probabilités XLV*, vol. 2078 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Cham, 2013, pp. 537–558.
- [85] KORTCHEMSKI, I. Random stable laminations of the disk. *Ann. Probab.* 42, 2 (2014), 725–759.

- [86] KORTCHEMSKI, I. Limit theorems for conditioned non-generic Galton-Watson trees. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, 2 (2015), 489–511.
- [87] KORTCHEMSKI, I. A predator-prey SIR type dynamics on large complete graphs with three phase transitions. *Stochastic Process. Appl.* 125, 3 (2015), 886–917.
- [88] KORTCHEMSKI, I. Predator–Prey Dynamics on Infinite Trees : A Branching Random Walk Approach. *J. Theoret. Probab.* 29, 3 (2016), 1027–1046.
- [89] KORTCHEMSKI, I., AND MARZOUK, C. Simply generated non-crossing partitions. *Combin. Probab. Comput.* (à paraître).
- [90] KORTCHEMSKI, I., AND MARZOUK, C. Triangulating stable laminations. *Electron. J. Probab.* 21 (2016), no. 11, 31p.
- [91] KREWERAS, G. Sur les partitions non croisées d’un cycle. *Discrete Math.* 1, 4 (1972), 333–350.
- [92] KRIKUN, M. Local structure of random quadrangulations. *arXiv :0512304*.
- [93] KRIKUN, M. Explicit enumeration of triangulations with multiple boundaries. *Electron. J. Combin.* 14, 1 (2007), Research Paper 61, 14 pp. (electronic).
- [94] LAMPERTI, J. Criteria for the recurrence or transience of stochastic process. I. *J. Math. Anal. Appl.* 1 (1960), 314–330.
- [95] LAMPERTI, J. A new class of probability limit theorems. *J. Math. Mech.* 11 (1962), 749–772.
- [96] LAMPERTI, J. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962), 62–78.
- [97] LAMPERTI, J. Criteria for stochastic processes. II. Passage-time moments. *J. Math. Anal. Appl.* 7 (1963), 127–145.
- [98] LAMPERTI, J. Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 22 (1972), 205–225.
- [99] LE GALL, J.-F. Random geometry on the sphere. *Proceedings of ICM 2014, Seoul* (à paraître).
- [100] LE GALL, J.-F. Random trees and applications. *Probability Surveys* (2005).
- [101] LE GALL, J.-F. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.* 169, 3 (2007), 621–670.
- [102] LE GALL, J.-F. Uniqueness and universality of the Brownian map. *Ann. Probab.* 41 (2013), 2880–2960.
- [103] LE GALL, J.-F., AND LE JAN, Y. Branching processes in Lévy processes : the exploration process. *Ann. Probab.* 26, 1 (1998), 213–252.
- [104] LE GALL, J.-F., AND MIERMONT, G. Scaling limits of random planar maps with large faces. *Ann. Probab.* 39, 1 (2011), 1–69.
- [105] LE GALL, J.-F., AND MIERMONT, G. Scaling limits of random trees and planar maps. In *Probability and statistical physics in two and more dimensions*, vol. 15 of *Clay Math. Proc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 155–211.

- [106] LE GALL, J.-F., AND PAULIN, F. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal.* 18, 3 (2008), 893–918.
- [107] MARCKERT, J.-F., AND MOKKADEM, A. The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion. *Ann. Probab.* 31, 3 (2003), 1655–1678.
- [108] MARCKERT, J.-F., AND MOKKADEM, A. Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map. *Ann. Probab.* 34, 6 (2006), 2144–2202.
- [109] MARCKERT, J.-F., AND PANHOLZER, A. Noncrossing trees are almost conditioned Galton-Watson trees. *Random Structures Algorithms* 20, 1 (2002), 115–125.
- [110] MCCAMMOND, J. Noncrossing partitions in surprising locations. *Amer. Math. Monthly* 113, 7 (2006), 598–610.
- [111] MEIR, A., AND MOON, J. W. On the altitude of nodes in random trees. *Canad. J. Math.* 30, 5 (1978), 997–1015.
- [112] MÉNARD, L., AND NOLIN, P. Percolation on uniform infinite planar maps. *Electron. J. Probab.* 19, 78 (02 2014), 1–27.
- [113] MIERMONT, G. Aspects of random maps. *Lecture notes of the 2014 Saint-Flour Probability Summer School, available online on the author’s webpage (<http://perso.ens-lyon.fr/gregory.miermont>)*.
- [114] MIERMONT, G. Self-similar fragmentations derived from the stable tree. I. Splitting at heights. *Probab. Theory Related Fields* 127, 3 (2003), 423–454.
- [115] MIERMONT, G. On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Electron. Commun. Probab.* 13 (2008), 248–257.
- [116] MIERMONT, G. The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. *Acta Math.* 210, 2 (2013), 319–401.
- [117] MILLER, J., AND SHEFFIELD, S. Quantum Loewner evolution. *Duke Mathematical Journal (à paraître)* (12 2013).
- [118] NEVEU, J. Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 22, 2 (1986), 199–207.
- [119] ORTMANN, J. Large deviations for non-crossing partitions. *Electron. J. Probab.* 17 (2012), no. 34, 25.
- [120] PAKES, A. G. Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration. *Stochastic Processes Appl.* 4, 2 (1976), 175–185.
- [121] PANAGIOTOU, K., STUFLER, B., AND WELLER, K. Scaling Limits of Random Graphs from Subcritical Classes. *Ann. Probab. (à paraître)*.
- [122] PEKÖZ, E. A., ROSS, N., AND RÖLLIN, A. Joint degree distributions of preferential attachment random graphs.
- [123] PITMAN, J. *Combinatorial stochastic processes*, vol. 1875 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard.

- [124] RAY, G. Large unicellular maps in high genus. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, 4 (2015), 1432–1456.
- [125] RÉMY, J.-L. Un procédé itératif de dénombrement d’arbres binaires et son application à leur génération aléatoire. *RAIRO Inform. Théor.* 19, 2 (1985), 179–195.
- [126] RICHIER, L. Universal aspects of critical percolation on random half-planar maps. *Electron. J. Probab.* 20(129) (2015).
- [127] RIVERO, V. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér’s condition. *Bernoulli* 11, 3 (2005), 471–509.
- [128] RIVERO, V. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér’s condition. II. *Bernoulli* 13, 4 (2007), 1053–1070.
- [129] RIZZOLO, D. Scaling limits of Markov branching trees and Galton-Watson trees conditioned on the number of vertices with out-degree in a given set. *arXiv :1105.2528* (05 2011).
- [130] SCHRAMM, O. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I.* Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 513–543.
- [131] STEPHENSON, R. Local convergence of large critical multi-type Galton-Watson trees and applications to random maps. *arXiv :1412.6911*.
- [132] STUFLER, B. Random enriched trees with applications to random graphs. *Preprint available on arxiv, <http://arxiv.org/abs/1504.02006>*.
- [133] SZYMAŃSKI, J. On a nonuniform random recursive tree. In *Random graphs ’85 (Poznań, 1985)*, vol. 144 of *North-Holland Math. Stud.* North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 297–306.
- [134] TUTTE, W. T. A census of planar maps. *Canad. J. Math.* 15 (1963), 249–271.
- [135] URIBE BRAVO, G. The falling apart of the tagged fragment and the asymptotic disintegration of the Brownian height fragmentation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 45, 4 (2009), 1130–1149.
- [136] VAN DER HOFSTAD, R. Lecture notes random graphs and complex networks. *In preparation, R. van der Hofstad (May 2013). Random graphs and complex networks. <http://www.win.tue.nl/rhofstad/NotesRGCN.pdf>* (2013).
- [137] WATABIKI, Y. Construction of non-critical string field theory by transfer matrix formalism in dynamical triangulation. *Nuclear Phys. B* 441, 1-2 (1995), 119–163.