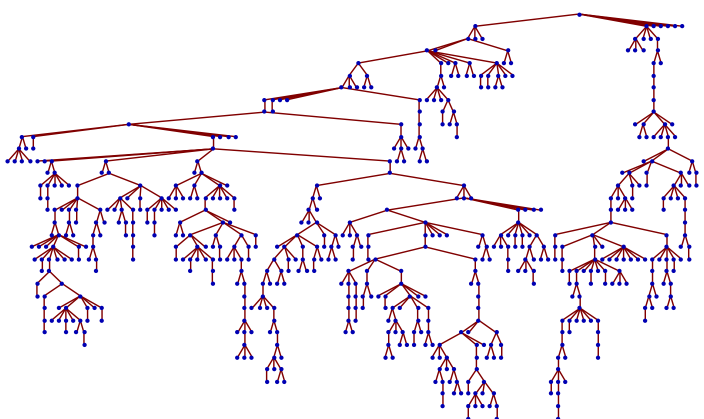
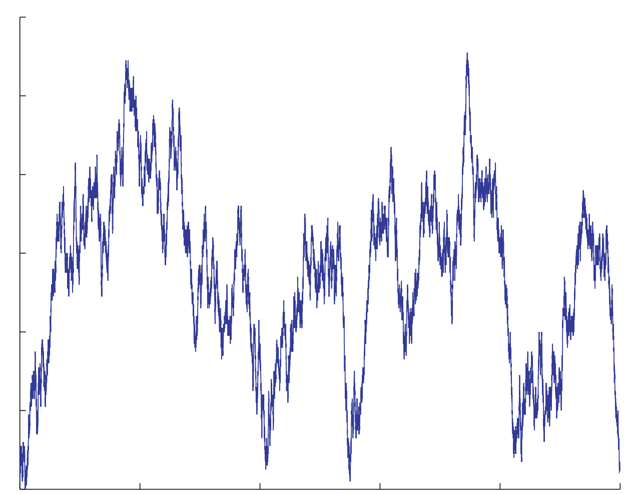
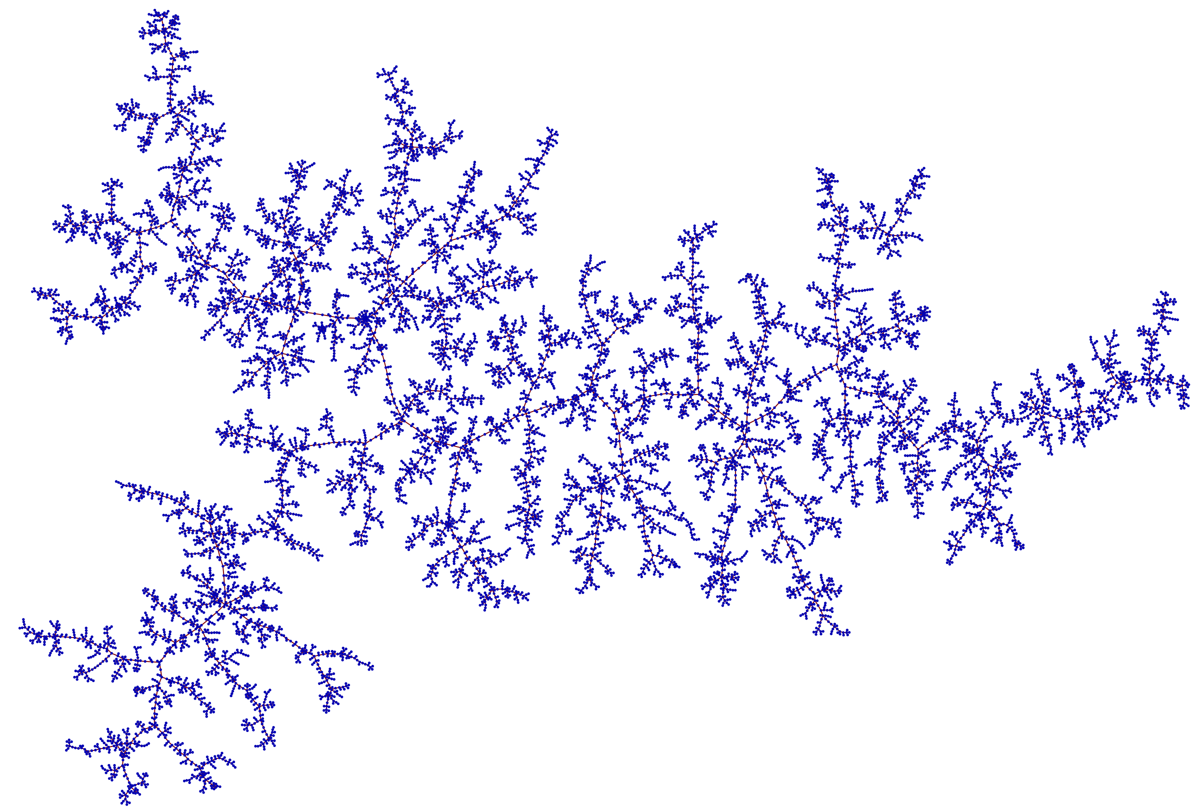
Arbres et marches aléatoires







Igor Kortchemski

CNRS & École polytechnique

Journées X-UPS 2016 – École polytechnique – Mai 2016

Quatre exercices

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!} = 1.$$

Quatre exercices

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!} = 1.$$

Plus généralement, montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

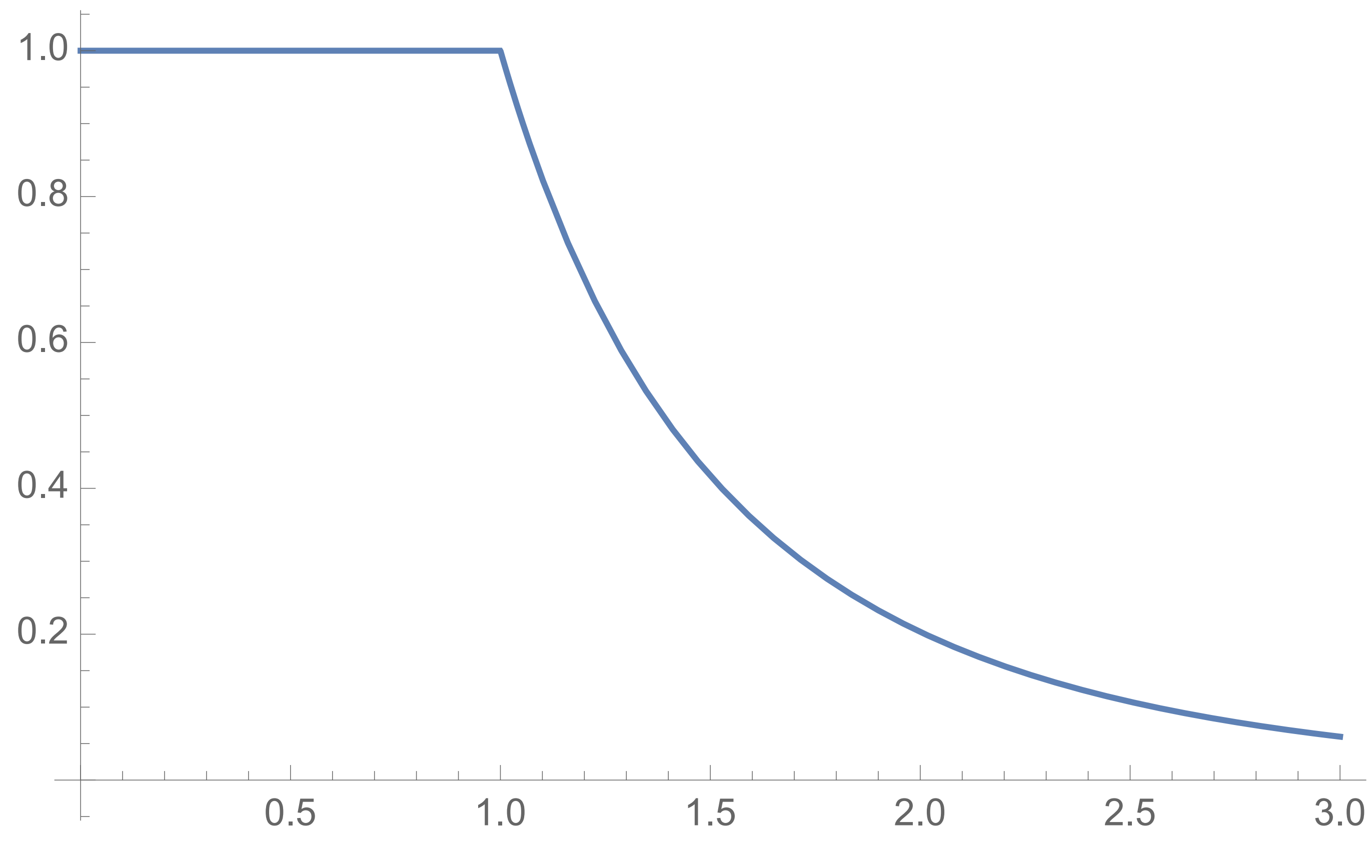
Quatre exercices

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!} = 1.$$

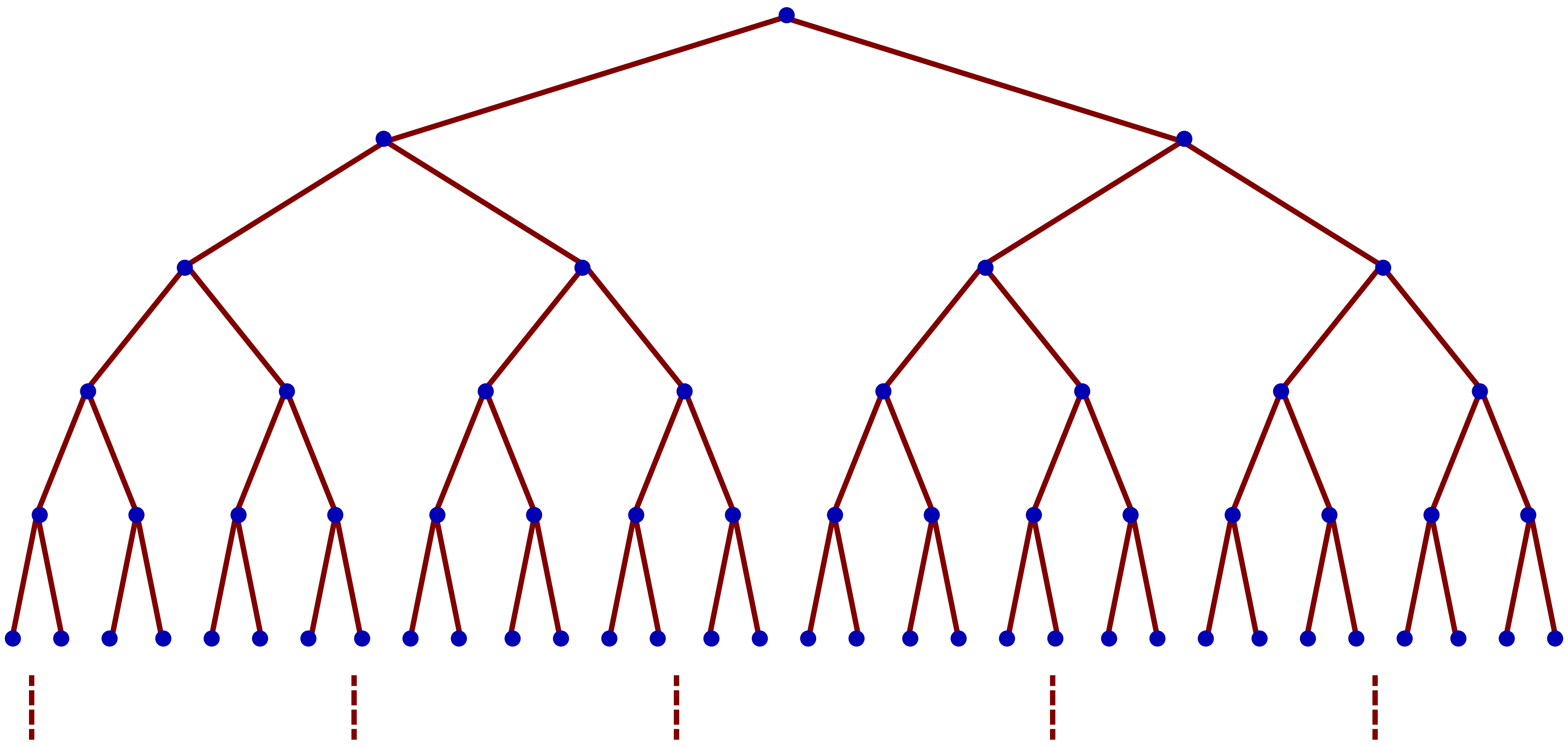
Plus généralement, montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \ \text{où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$



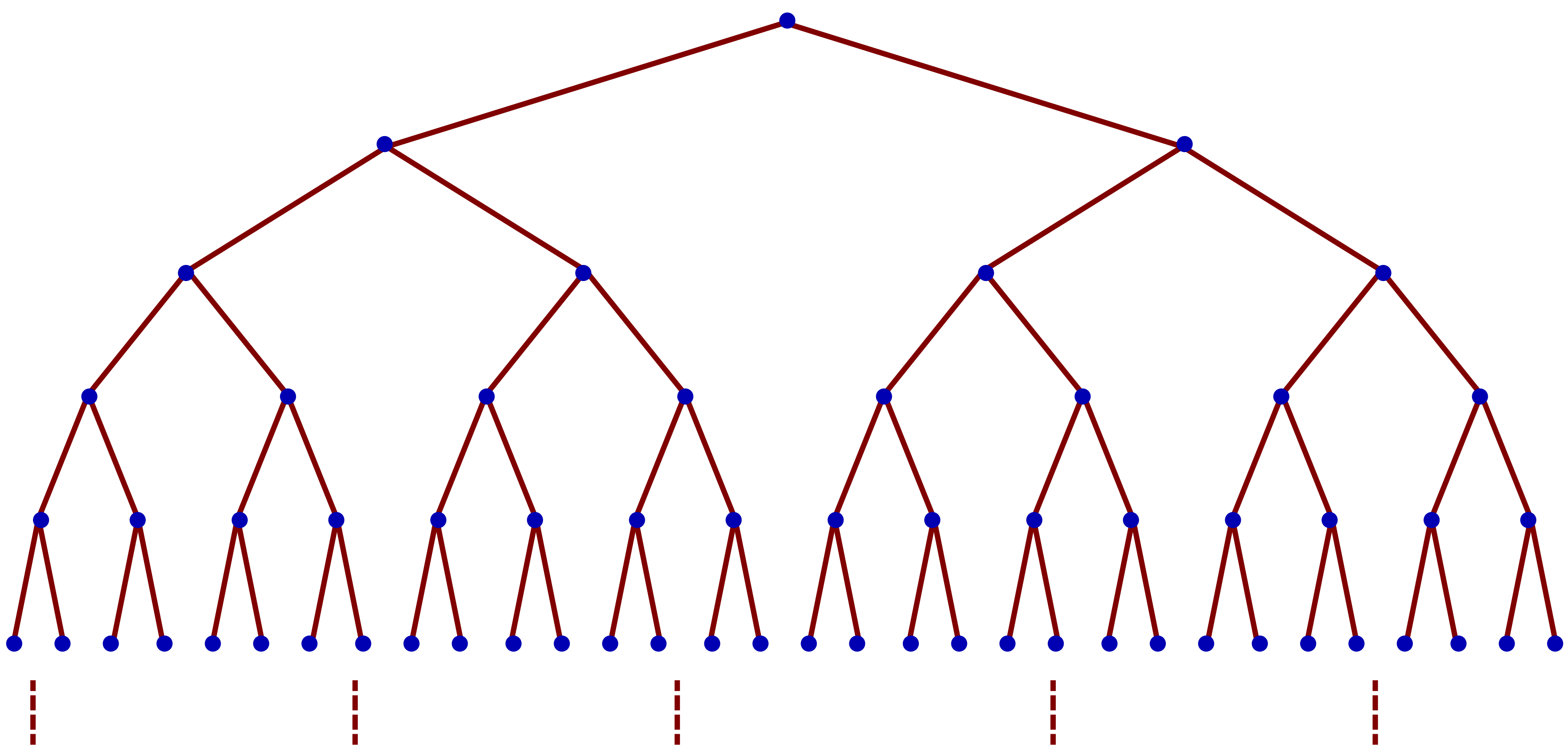
Quatre exercices

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé.



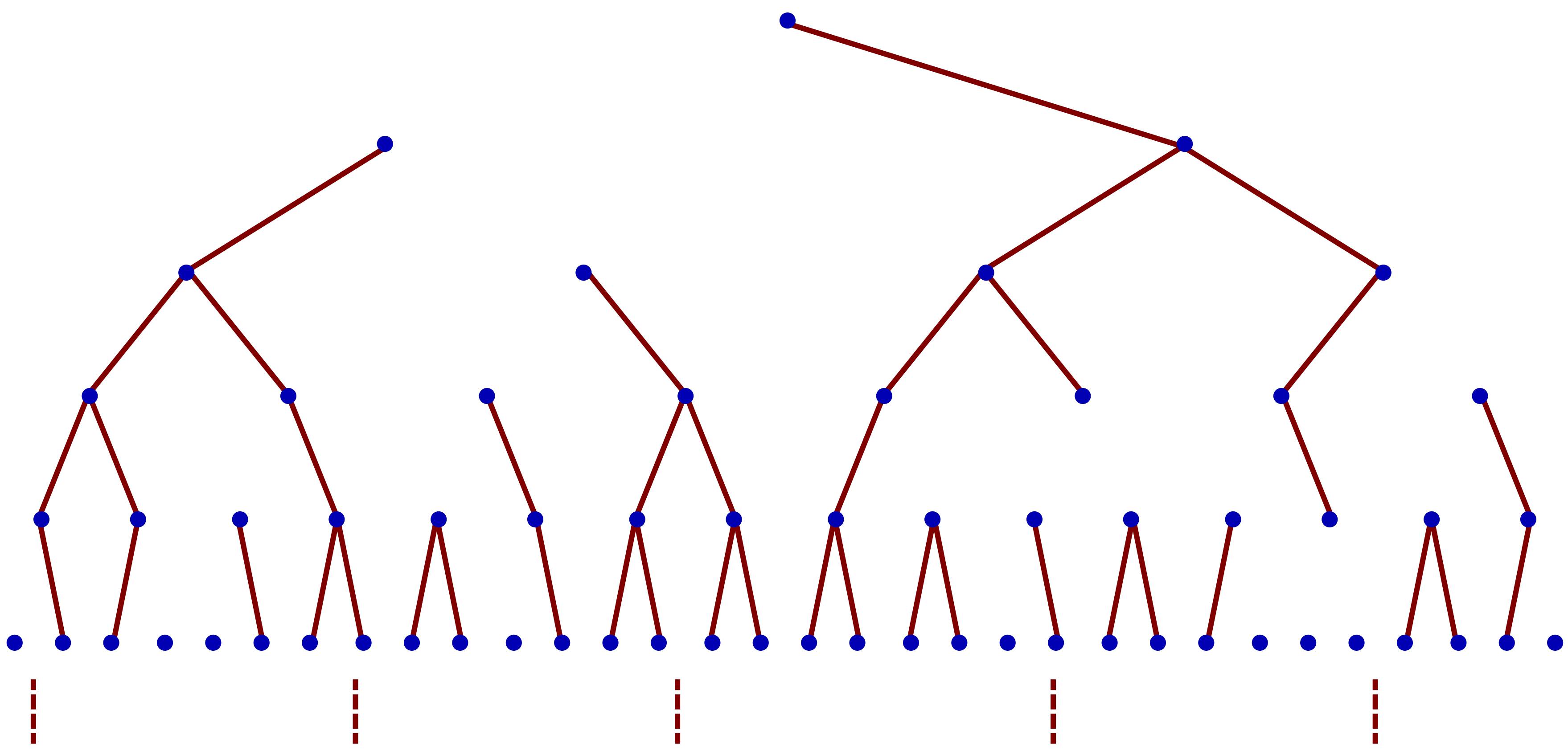
Quatre exercices

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes.



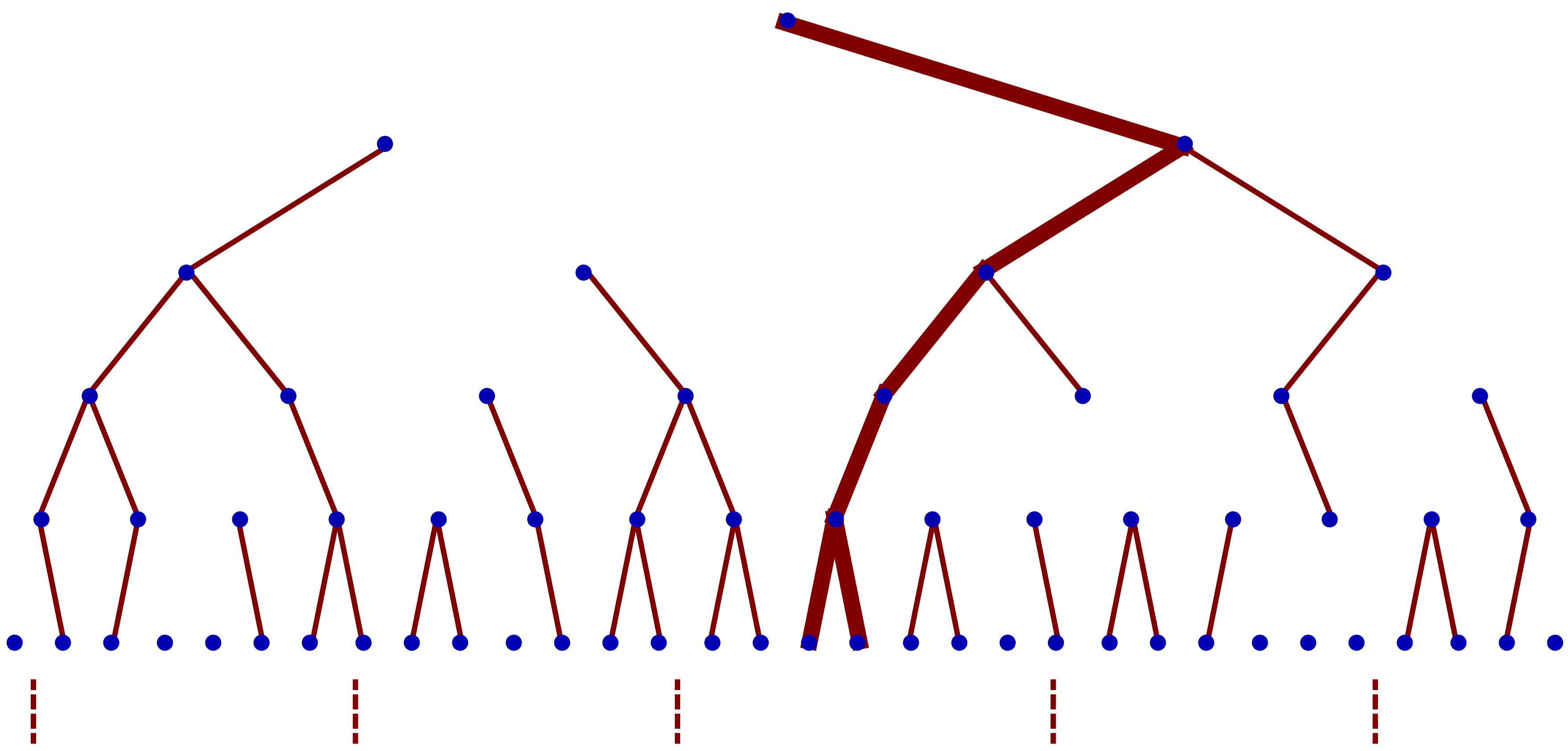
Quatre exercices

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0, 1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?



Quatre exercices

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?



Quatre exercices

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

Quatre exercices

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

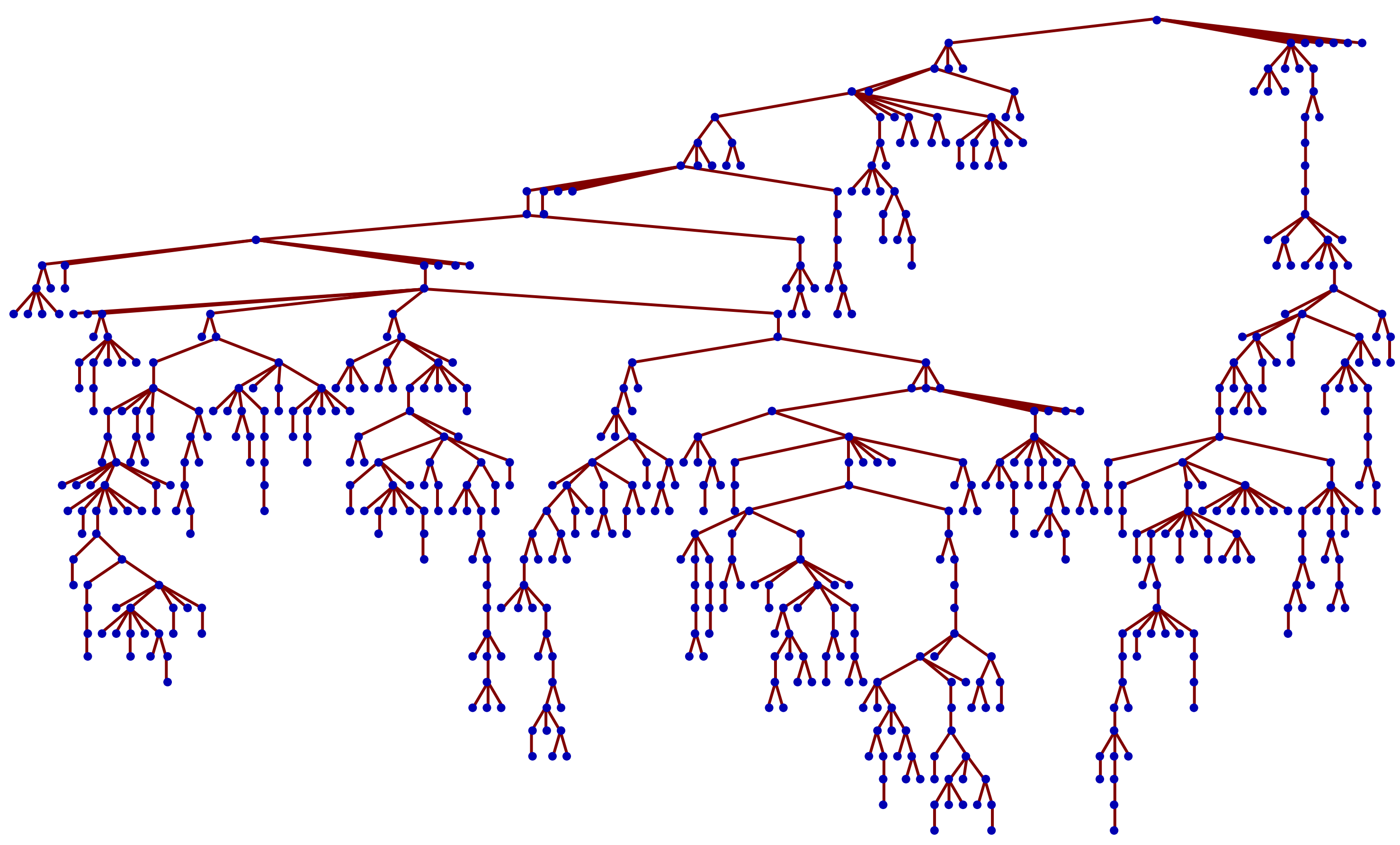


Figure: Un arbre généalogique à 600 individus. Ici, 302 individus n'ont pas de descendance et le nombre maximal d'enfants est 7.

Quatre exercices

Exercice 4. [Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

Quatre exercices

Exercice 4. [Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \mathrm{Card}(f([\![1, n]\!]))$.

Quatre exercices

Exercice 4. [Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \text{Card}(f([\![1, n]\!]))$.

Des essais numériques montrent que la loi de Y_n est très bien approchée par une loi normale. Est-il exact que $(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])/\sqrt{n}$ tend vers une loi normale ?

$\rightsquigarrow$ **Point commun de ces exercices :** ils peuvent être résolus en utilisant les arbres aléatoires et leurs codages par des marches aléatoires.

Plan

I. L'étude des grands arbres aléatoires

Plan

I. L'étude des grands arbres aléatoires

II. Codage par des marches aléatoires

Plan

I. L'étude des grands arbres aléatoires

II. Codage par des marches aléatoires

III. Outils pour étudier les marches aléatoires

Plan

I. L'étude des grands arbres aléatoires

1) Processus de Bienaymé–Galton–Watson

Processus de BGW

Soit $\mu = (\mu(i) : i \geqslant 0)$ une probabilité sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ tq $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

On définit de manière récursive la suite $(Z_n : n \geqslant 0)$, appelée *processus de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction* μ, comme suit :

Processus de BGW

Soit $\mu = (\mu(i) : i \geqslant 0)$ une probabilité sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ tq $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

On définit de manière récursive la suite $(Z_n : n \geqslant 0)$, appelée *processus de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction* μ, comme suit :

$$Z_0 = 1, \qquad \text{et pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

Processus de BGW

Soit $\mu = (\mu(i) : i \geqslant 0)$ une probabilité sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ tq $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

On définit de manière récursive la suite $(Z_n : n \geqslant 0)$, appelée *processus de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction* μ, comme suit :

$$Z_0 = 1, \qquad \text{et pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où $(X_j^{(n)})_{j,n \geqslant 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi μ (définies sur le même espace de probabilité).

Processus de BGW

Soit $\mu = (\mu(i) : i \geqslant 0)$ une probabilité sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ tq $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

On définit de manière récursive la suite $(Z_n : n \geqslant 0)$, appelée *processus de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction* μ, comme suit :

$$Z_0 = 1, \qquad \text{et pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où $(X_j^{(n)})_{j,n \geqslant 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi μ (définies sur le même espace de probabilité).

Que vaut

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } Z_n = 0\right)?$$

Solution

- Par propriété d'union croissante,

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } Z_n = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right).$$

Solution

- Par propriété d'union croissante,

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } Z_n = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right).$$

- On introduit $\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(n) z^n$ et on montre que

$$\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 0\right) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(n) \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)^n = \phi\left(\mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)\right).$$

Solution

- Par propriété d'union croissante,

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } Z_n = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right).$$

- On introduit $\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(n) z^n$ et on montre que

$$\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 0\right) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(n) \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)^n = \phi\left(\mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)\right).$$

- On en déduit que la probabilité d'extinction est le plus petit point fixe de ϕ, et

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } Z_n = 0\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi'(1) = \sum_{n \geqslant 0} n\mu(n) \leqslant 1 \\ s & \text{où } \phi(s) = s \text{ avec } s < 1 \text{ si } \phi'(1) > 1. \end{cases}$$

Si μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0)+\mu(1)<1$, on dit que

$$\mu \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{sous-critique} & \text{si} \quad \sum_{i\geqslant 0} i\mu(i) < 1 \\ \text{critique} & \text{si} \quad \sum_{i\geqslant 0} i\mu(i) = 1 \\ \text{sur-critique} & \text{si} \quad \sum_{i\geqslant 0} i\mu(i) > 1. \end{cases}$$

Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre.

Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre. Ils proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices.

Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre. Ils proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices. Si la méthode est judicieuse, une erreur s'est glissée dans leur travail (ils concluent que la probabilité d'extinction vaut toujours 1)

Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre. Ils proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices. Si la méthode est judicieuse, une erreur s'est glissée dans leur travail (ils concluent que la probabilité d'extinction vaut toujours 1), et il faut attendre 1930 pour que Steffensen publie une solution complète.

Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre. Ils proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices. Si la méthode est judicieuse, une erreur s'est glissée dans leur travail (ils concluent que la probabilité d'extinction vaut toujours 1), et il faut attendre 1930 pour que Steffensen publie une solution complète.

Cependant, en 1972, Heyde & Seneta découvrent une note de Bienaymé datant de 1845, où Bienaymé énonce correctement que la probabilité d'extinction vaut un si la moyenne de la loi de reproduction est inférieure à un, avec quelques explications, mais sans preuve publiée.

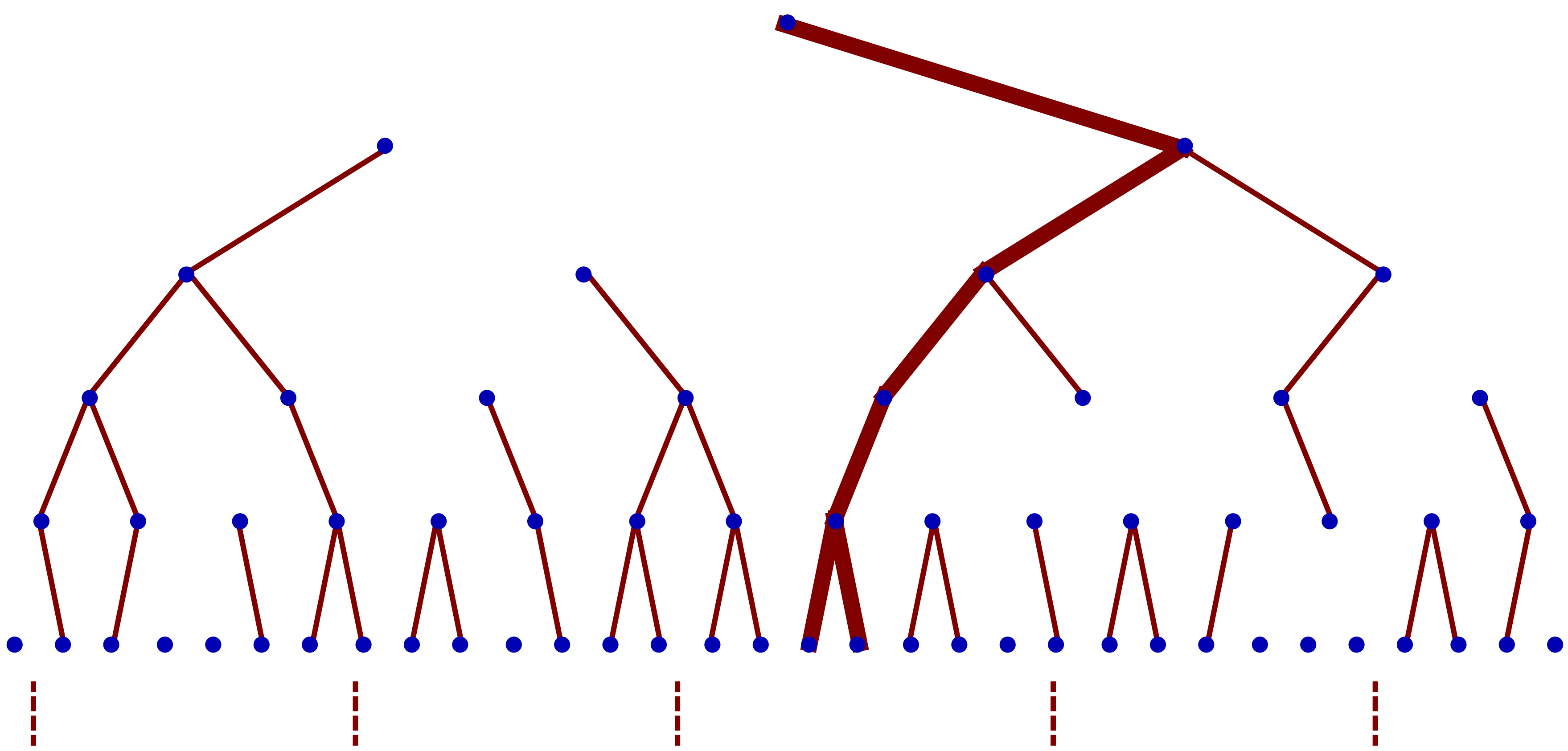
Remarques historiques

En 1875, Galton & Watson étudient cette question afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles en Angleterre. Ils proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices. Si la méthode est judicieuse, une erreur s'est glissée dans leur travail (ils concluent que la probabilité d'extinction vaut toujours 1), et il faut attendre 1930 pour que Steffensen publie une solution complète.

Cependant, en 1972, Heyde & Seneta découvrent une note de Bienaymé datant de 1845, où Bienaymé énonce correctement que la probabilité d'extinction vaut un si la moyenne de la loi de reproduction est inférieure à un, avec quelques explications, mais sans preuve publiée. Il semble cependant très plausible que Bienaymé a également trouvé la preuve en utilisant les fonctions génératrices.

Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?



Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?

$\leadsto$ Soit Z_n le nombre de sommets à hauteur n accessibles par des arêtes fermées depuis l'origine.

Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?

$\leadsto$ Soit Z_n le nombre de sommets à hauteur n accessibles par des arêtes fermées depuis l'origine.

$\leadsto$ $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus de BGW de loi de reproduction une loi binomiale de paramètres $(2,p)$

Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0,1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?

$\leadsto$ Soit Z_n le nombre de sommets à hauteur n accessibles par des arêtes fermées depuis l'origine.

$\leadsto$ $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus de BGW de loi de reproduction une loi binomiale de paramètres $(2, p)$, qui a donc pour moyenne $2p$ et fonction génératrice $\phi(s) = (1-p)^2 + 2p(1-p)s + p^2 s^2$.

Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0, 1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?

⇝ Soit Z_n le nombre de sommets à hauteur n accessibles par des arêtes fermées depuis l'origine.

⇝ $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus de BGW de loi de reproduction une loi binomiale de paramètres $(2, p)$, qui a donc pour moyenne $2p$ et fonction génératrice $\phi(s) = (1-p)^2 + 2p(1-p)s + p^2 s^2$.

⇝ Ainsi, lorsque $p \leqslant 1/2$, la probabilité qu'il existe un chemin infini fermé partant de l'origine est nulle

Application

Exercice 2. Considérons un arbre binaire infini et soit $p \in (0, 1)$ un nombre fixé. On garde chaque arête avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres arêtes. Quelle est la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine ?

⇝ Soit Z_n le nombre de sommets à hauteur n accessibles par des arêtes fermées depuis l'origine.

⇝ $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus de BGW de loi de reproduction une loi binomiale de paramètres $(2, p)$, qui a donc pour moyenne $2p$ et fonction génératrice $\phi(s) = (1-p)^2 + 2p(1-p)s + p^2 s^2$.

⇝ Ainsi, lorsque $p \leqslant 1/2$, la probabilité qu'il existe un chemin infini fermé partant de l'origine est nulle, et lorsque $p > 1/2$, elle est égale à elle vaut $1 - s$, où $s \in [0, 1]$ est la plus petite solution positive de $\phi(s) = s$, qui est $(1-p)^2/p^2$. Dans ce cas, la probabilité qu'il existe un chemin infini partant de l'origine est $\frac{2p-1}{p^2}$.

Mais que dire la forme de l'arbre généalogique sous-jacent ?

2) Arbres de Bienaymé–Galton–Watson

Définition des arbres plans enracinés

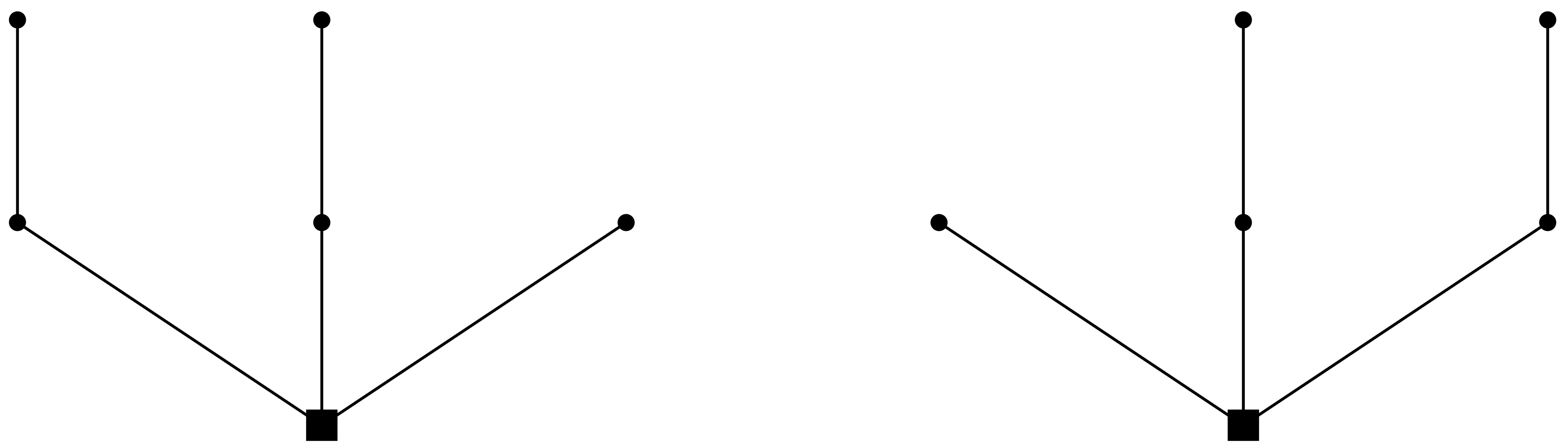


Figure: Deux arbres plans enracinés différents

Définition des arbres plans enracinés

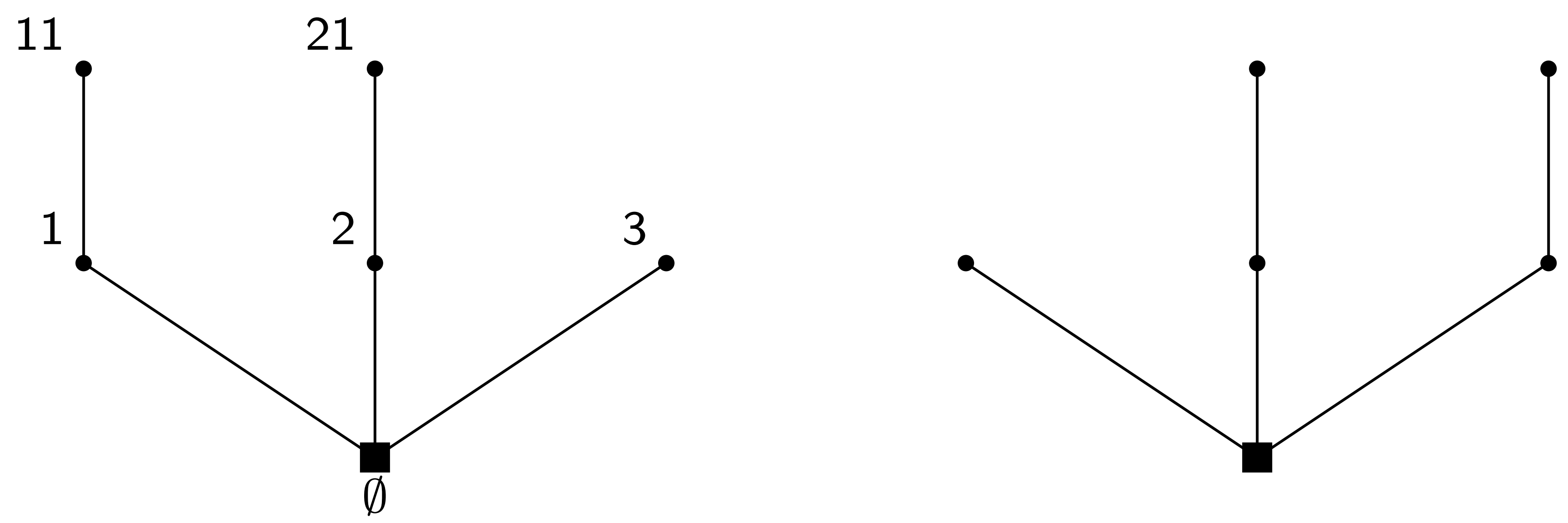


Figure: Deux arbres plans enracinés différents

Définition des arbres plans enracinés

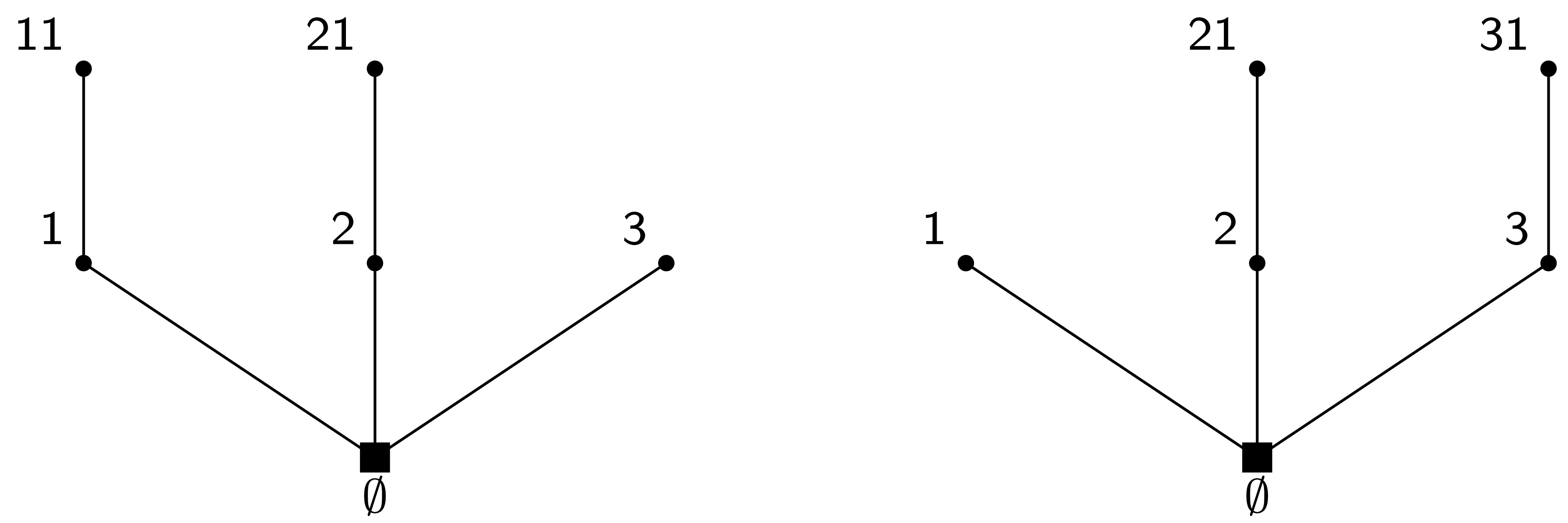


Figure: Deux arbres plans enracinés différents

Définition des arbres plans enracinés

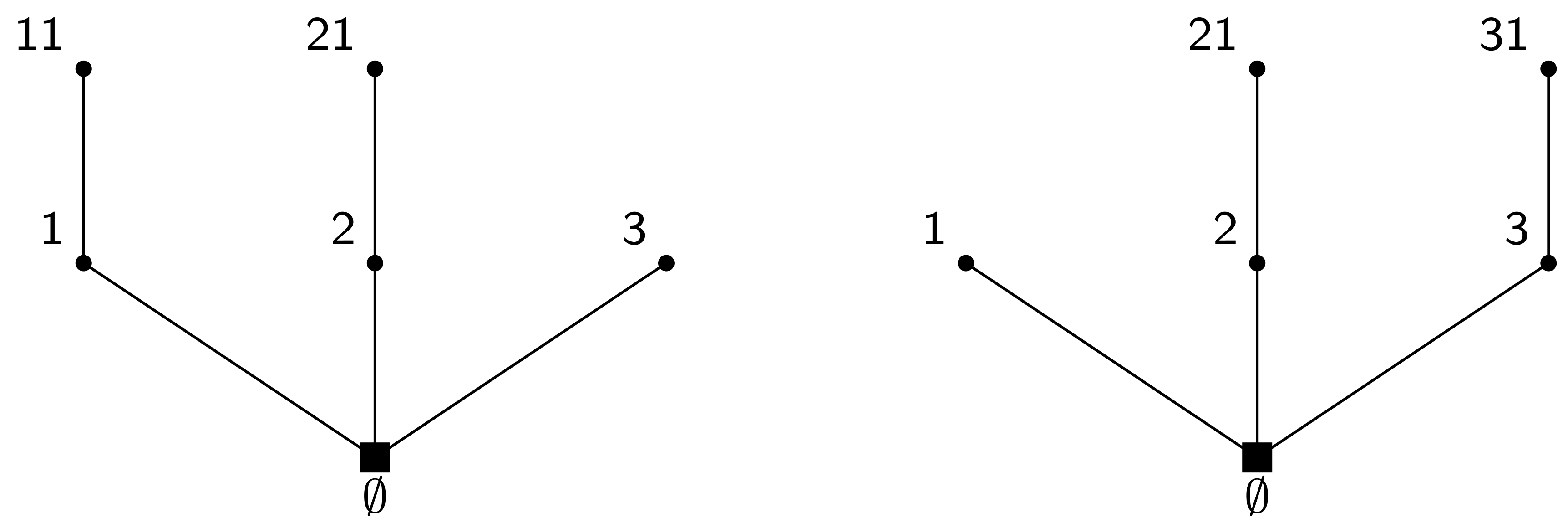


Figure: Deux arbres plans enracinés différents, celui de gauche est $\{\emptyset, 1, 11, 2, 21, 3\}$ et celui de droite est $\{\emptyset, 1, 2, 21, 3, 31\}$.

On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathbb{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

Un *arbre ordonné enraciné* (on dit parfois aussi *arbre plan enraciné* ou *arbre planaire enraciné*) τ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{U}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \tau$,

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathbb{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

Un *arbre ordonné enraciné* (on dit parfois aussi *arbre plan enraciné* ou *arbre planaire enraciné*) τ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{U}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \tau$,

(ii) si $v \in \tau$ et $v = uj$ pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$, alors $u \in \tau$,

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathbb{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

Un *arbre ordonné enraciné* (on dit parfois aussi *arbre plan enraciné* ou *arbre planaire enraciné*) τ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{U}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \tau$,

(ii) si $v \in \tau$ et $v = uj$ pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$, alors $u \in \tau$,

(iii) pout tout $u \in \tau$, il existe $k_u(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que, pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, $uj \in \tau$ si et seulement si $1 \leqslant j \leqslant k_u(\tau)$.

On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des *étiquettes* :

$$\mathbb{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

Un *arbre ordonné enraciné* (on dit parfois aussi *arbre plan enraciné* ou *arbre planaire enraciné*) τ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{U}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \tau$,

(ii) si $v \in \tau$ et $v = uj$ pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$, alors $u \in \tau$,

(iii) pout tout $u \in \tau$, il existe $k_u(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que, pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, $uj \in \tau$ si et seulement si $1 \leqslant j \leqslant k_u(\tau)$.

On note $\mathbb{T}$ l'ensemble des arbres plans enracinés.

Arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

Arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau) = \prod_{u \in \tau} \mu(k_u)$$

Arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau) = \prod_{u \in \tau} \mu(k_u)$$

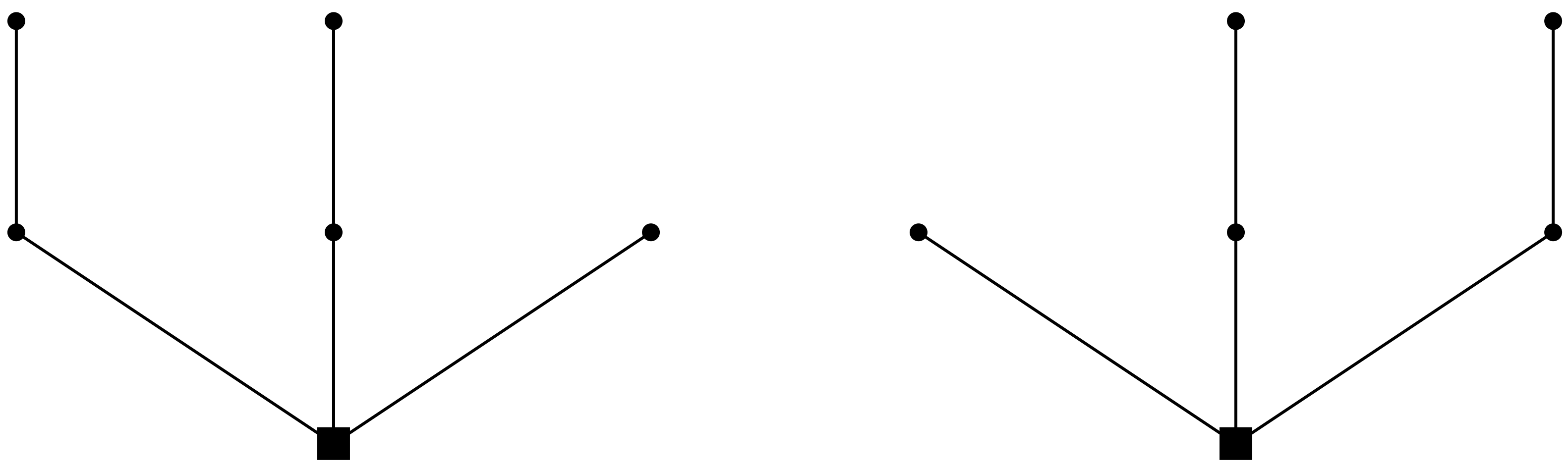


Figure: Ces deux arbres ont la même probabilité $\mu(3)\mu(1)^2\mu(0)^3$.

Arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau) = \prod_{u \in \tau} \mu(k_u)$$

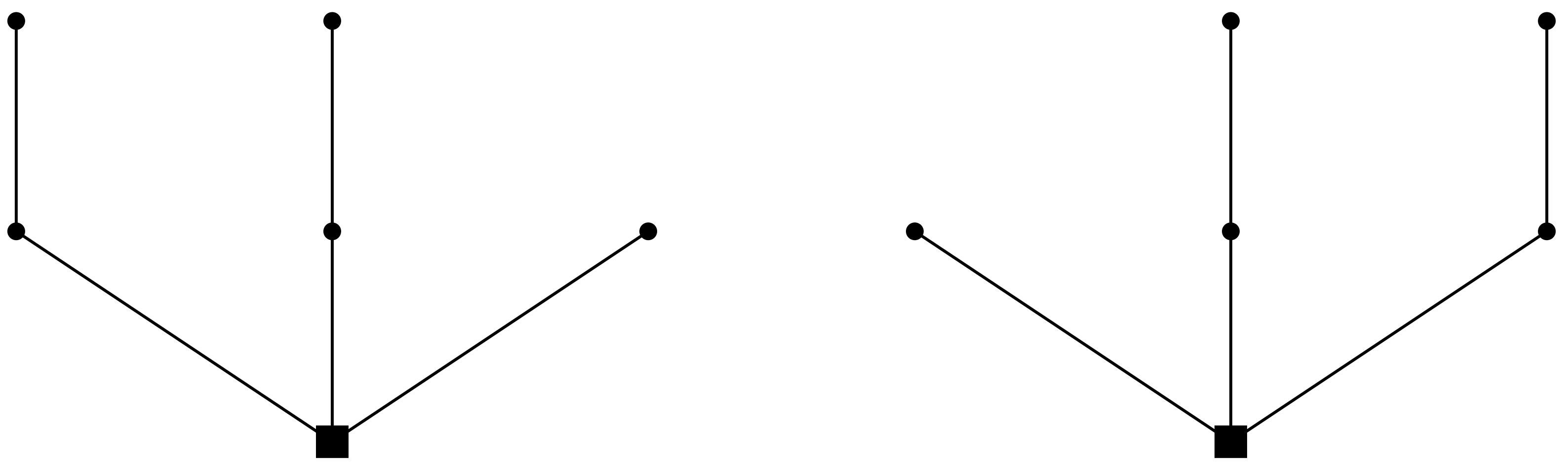


Figure: Ces deux arbres ont la même probabilité $\mu(3)\mu(1)^2\mu(0)^3$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_\mu$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{T}$.

Dans la suite, par arbre de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction μ (ou plus simplement BGW_μ arbre) on entend un arbre aléatoire (c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{T}$) dont la loi est $\mathbb{P}_\mu$.

Dans la suite, par arbre de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction μ (ou plus simplement BGW_μ arbre) on entend un arbre aléatoire (c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{T}$) dont la loi est $\mathbb{P}_\mu$.

On pourra aussi parler d'arbre de Bienaymé–Galton–Watson (ou de BGW arbre) lorsque la loi de reproduction est implicite.

Grands arbres de BGW

- But : étudier des BGW arbres conditionnés à être grands.

Grands arbres de BGW

$\leadsto$ But : étudier des BGW arbres conditionnés à être grands.

Plus précisément, si $\mathcal{T}$ est un BGW_μ arbre et si $n \geqslant 1$ est un entier tel que $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) > 0$, par

BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets

Grands arbres de BGW

$\rightsquigarrow$ But : étudier des BGW arbres conditionnés à être grands.

Plus précisément, si $\mathcal{T}$ est un BGW_{μ} arbre et si $n \geqslant 1$ est un entier tel que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) > 0$, par

$$\mathrm{BGW}_{\mu} \text{ arbre conditionné à avoir } n \text{ sommets}$$

on entendra un arbre aléatoire $\mathcal{T}_n$ (càd une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T}$) dont la loi est la loi conditionnelle de $\mathcal{T}$ sachant que $|\mathcal{T}| = n$.

Grands arbres de BGW

↝ But : étudier des BGW arbres conditionnés à être grands.

Plus précisément, si $\mathcal{T}$ est un BGW_{μ} arbre et si $n \geqslant 1$ est un entier tel que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) > 0$, par

$$\mathrm{BGW}_{\mu} \text{ arbre conditionné à avoir } n \text{ sommets}$$

on entendra un arbre aléatoire $\mathcal{T}_n$ (càd une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T}$) dont la loi est la loi conditionnelle de $\mathcal{T}$ sachant que $|\mathcal{T}| = n$.

Ou encore, on dira que $\mathcal{T}_n$ est un BGW_{μ} arbre conditionné à avoir n sommets si pour tout $\tau \in \mathbb{T}$ on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau) = \mathbb{P}\left(\mathcal{T} = \tau \,\middle|\, |\mathcal{T}| = n\right),$$

Grands arbres de BGW

$\rightsquigarrow$ But : étudier des BGW arbres conditionnés à être grands.

Plus précisément, si $\mathcal{T}$ est un BGW_μ arbre et si $n \geqslant 1$ est un entier tel que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) > 0$, par

$$\text{BGW}_\mu \text{ arbre conditionné à avoir } n \text{ sommets}$$

on entendra un arbre aléatoire $\mathcal{T}_n$ (càd une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T}$) dont la loi est la loi conditionnelle de $\mathcal{T}$ sachant que $|\mathcal{T}| = n$.

Ou encore, on dira que $\mathcal{T}_n$ est un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets si pour tout $\tau \in \mathbb{T}$ on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau) = \mathbb{P}\left(\mathcal{T} = \tau \;\middle|\; |\mathcal{T}| = n\right),$$

ou, de manière équivalente, si pour tout arbre τ avec n sommets on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau)}{\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n)}.$$

Exemple : arbres uniformes à n sommets

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. Alors $\mathcal{T}_n$ suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres à n sommets.

Exemple : arbres uniformes à n sommets

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. Alors $\mathcal{T}_n$ suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres à n sommets.

En effet, si τ est un arbre à n sommets, il suffit de démontrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau)$ ne dépend que de n.

Exemple : arbres uniformes à n sommets

$\leadsto$ Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. Alors $\mathcal{T}_n$ suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres à n sommets.

En effet, si τ est un arbre à n sommets, il suffit de démontrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau)$ ne dépend que de n.

Comme

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau)}{\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n)},$$

il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau)$ ne dépend que de n.

Exemple : arbres uniformes à n sommets

↝ Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. Alors $\mathcal{T}_n$ suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres à n sommets.

En effet, si τ est un arbre à n sommets, il suffit de démontrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau)$ ne dépend que de n.

Comme

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \tau) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau)}{\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n)},$$

il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau)$ ne dépend que de n.

Mais

$$\mathbb{P}(\mathcal{T} = \tau) = \prod_{u \in \tau} \frac{1}{2^{k_u+1}} = 2^{-\sum_{u \in \tau}(k_u+1)} = 2^{-n},$$

d'où le résultat.

Retour sur :

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

Retour sur :

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

$\leadsto$ On peut reformuler la question en termes de BGW arbres conditionnés.

Retour sur :

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

$\leadsto$ On peut reformuler la question en termes de BGW arbres conditionnés.

Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW$_\mu$ arbre conditionné à avoir n sommets avec $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$.

Retour sur :

Exercice 3. Dans un arbre généalogique typique à n individus, combien n'ont pas eu de descendance ? Quel est le nombre maximal d'enfants ?

$\leadsto$ On peut reformuler la question en termes de BGW arbres conditionnés.

Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW$_\mu$ arbre conditionné à avoir n sommets avec $\mu(i) = 1/2^{i+1}$ pour tout $i \geqslant 0$.

Quelle est le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$? Quel est le nombre maximal d'enfants d'un sommet de $\mathcal{T}_n$?

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

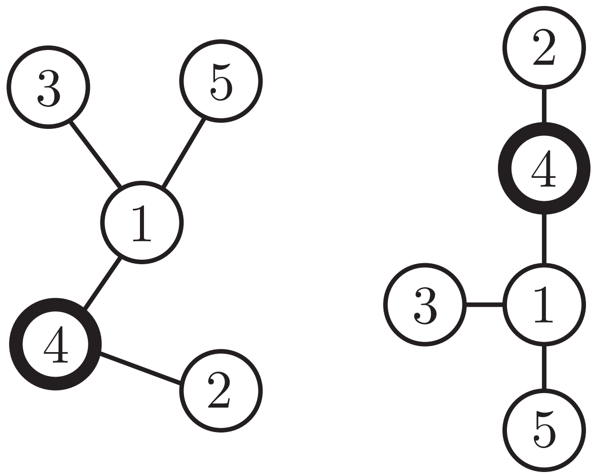


Figure: Deux arbres enracinés étiquetés non ordonnés identiques.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Alors suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = e^{-1}/i!$ pour tout $i \geqslant 0$ (c'est une loi de Poisson de paramètre 1).

Alors suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = e^{-1}/i!$ pour tout $i \geqslant 0$ (c'est une loi de Poisson de paramètre 1).

- Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Alors suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = e^{-1}/i!$ pour tout $i \geqslant 0$ (c'est une loi de Poisson de paramètre 1).

– Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

– Soit $\widehat{\mathcal{T}}_n$ l'arbre enraciné ordonné étiqueté obtenu en étiquetant les sommets de $\mathcal{T}_n$ de manière uniforme.

Alors suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = e^{-1}/i!$ pour tout $i \geqslant 0$ (c'est une loi de Poisson de paramètre 1).

- Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.
- Soit $\widehat{\mathcal{T}}_n$ l'arbre enraciné ordonné étiqueté obtenu en étiquetant les sommets de $\mathcal{T}_n$ de manière uniforme.
- Soit $\mathrm{Forme}(\widehat{\mathcal{T}}_n)$ l'arbre enraciné étiqueté non ordonné obtenu à partir de $\widehat{\mathcal{T}}_n$ en oubliant l'ordre des enfants de chaque sommet.

Alors suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Exemple : arbres étiquetés non ordonnés

Par définition, un arbre enraciné étiqueté non ordonné avec n sommets est un arbre avec n sommets, dont un est distingué (la racine), où l'ordre des enfants des sommets n'a pas d'importance et où les étiquettes des sommets forment l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit μ la probabilité définie par $\mu(i) = e^{-1}/i!$ pour tout $i \geqslant 0$ (c'est une loi de Poisson de paramètre 1).

– Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

– Soit $\widehat{\mathcal{T}}_n$ l'arbre enraciné ordonné étiqueté obtenu en étiquetant les sommets de $\mathcal{T}_n$ de manière uniforme.

– Soit $\mathrm{Forme}(\widehat{\mathcal{T}}_n)$ l'arbre enraciné étiqueté non ordonné obtenu à partir de $\widehat{\mathcal{T}}_n$ en oubliant l'ordre des enfants de chaque sommet.

Alors $\mathrm{Forme}(\widehat{\mathcal{T}}_n)$ suit la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés enracinés non ordonnés à n sommets.

Retour sur

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

Retour sur

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

On verra que si μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_{μ} arbre, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!}.$$

Retour sur

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

On verra que si μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW$_\mu$ arbre, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!}.$$

On a alors

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| < \infty\right).$$

Retour sur

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

On verra que si μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW$_\mu$ arbre, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}.$$

On a alors

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| < \infty\right).$$

Cette quantité vaut 1 si $\lambda \leqslant 1$, et le plus petit point fixe de $e^{\lambda(s-1)}$ sinon.

3) Grands objets discrets combinatoires

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

$\leadsto$ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

$\leadsto$ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$. (méthodes bijectives, fonctions génératrices)

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

$\leadsto$ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$. (méthodes bijectives, fonctions génératrices)

$\leadsto$ Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

- Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$. (méthodes bijectives, fonctions génératrices)
- Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

- Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$. (méthodes bijectives, fonctions génératrices)
- Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*. Que dire de X_n ?

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$ lorsque $n \to \infty$.

- Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$. (méthodes bijectives, fonctions génératrices)
- Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*. Que dire de X_n ?
- Une possibilité pour étudier X_n est de trouver un objet continu X tel que $X_n \to X$ quand $n \to \infty$.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X.$$

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X.$$

Plusieurs intérêts :

$\rightsquigarrow$ *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.
- *Du continu au discret :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.
- *Du continu au discret :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.
- *Universalité :* si $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ est une autre suite d'objets qui converge vers X, alors X_n et Y_n ont à peu près les mêmes propriétés pour n grand.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

$\rightsquigarrow$ *Dans quel espace vivent les objets ?*

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad X.$$

⇝ *Dans quel espace vivent les objets ?* Un espace métrique (Z, d) (complet séparable).

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

- *Dans quel espace vivent les objets ?* Un espace métrique (Z, d) (complet séparable).
- *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

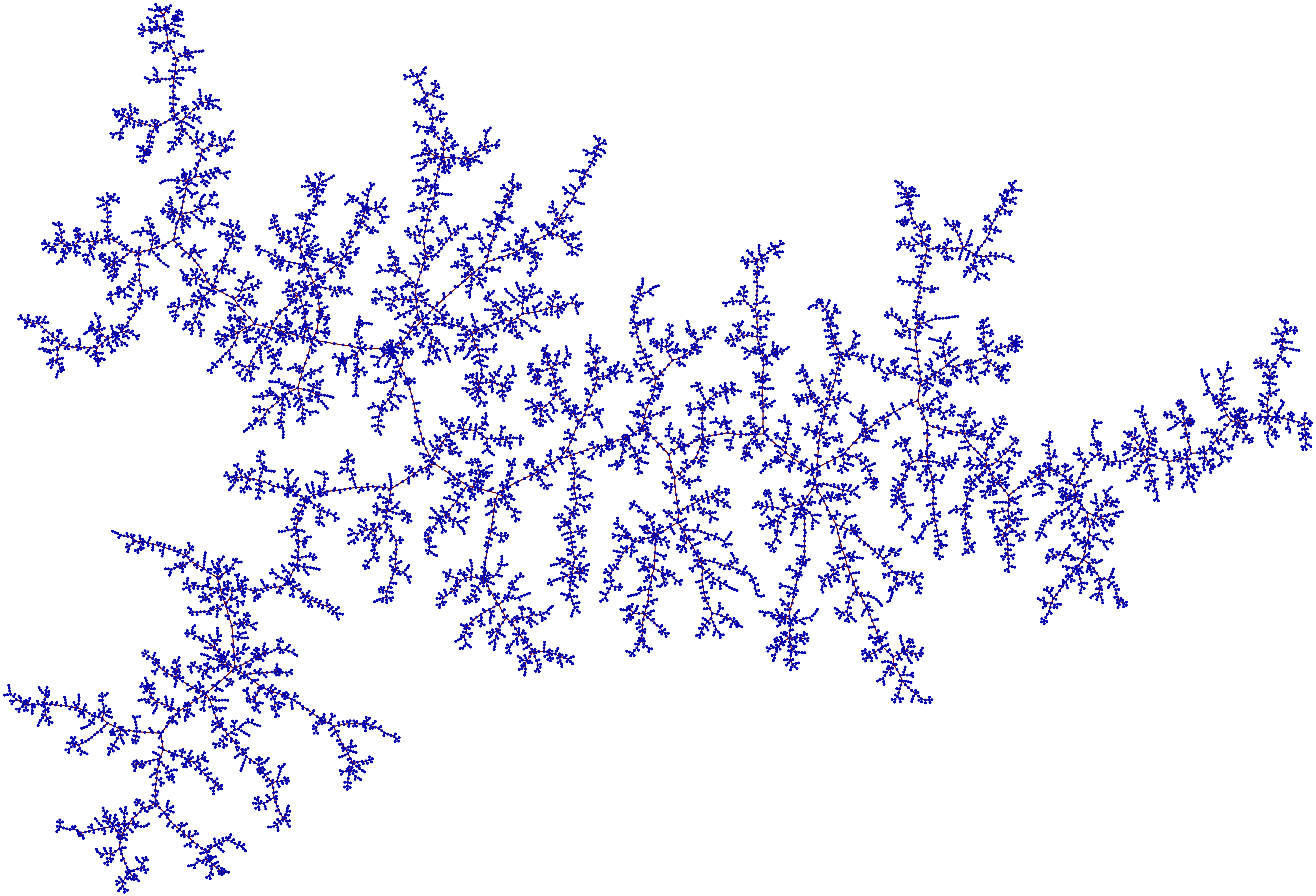
$$X_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad X.$$

- *Dans quel espace vivent les objets ?* Un espace métrique (Z, d) (complet séparable).
- *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Convergence en loi :

$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{E}\left[F(X)\right]$$

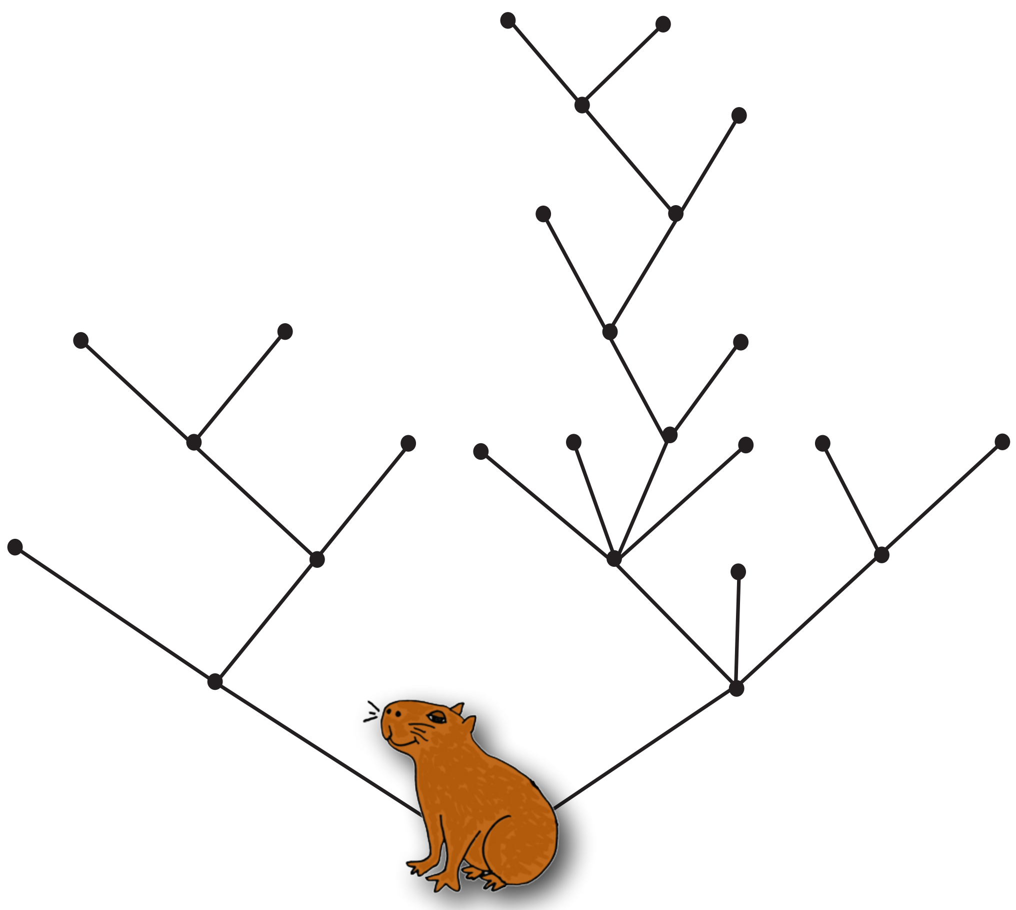
pour toute fonction continue bornée $F : Z \to \mathbb{R}$.

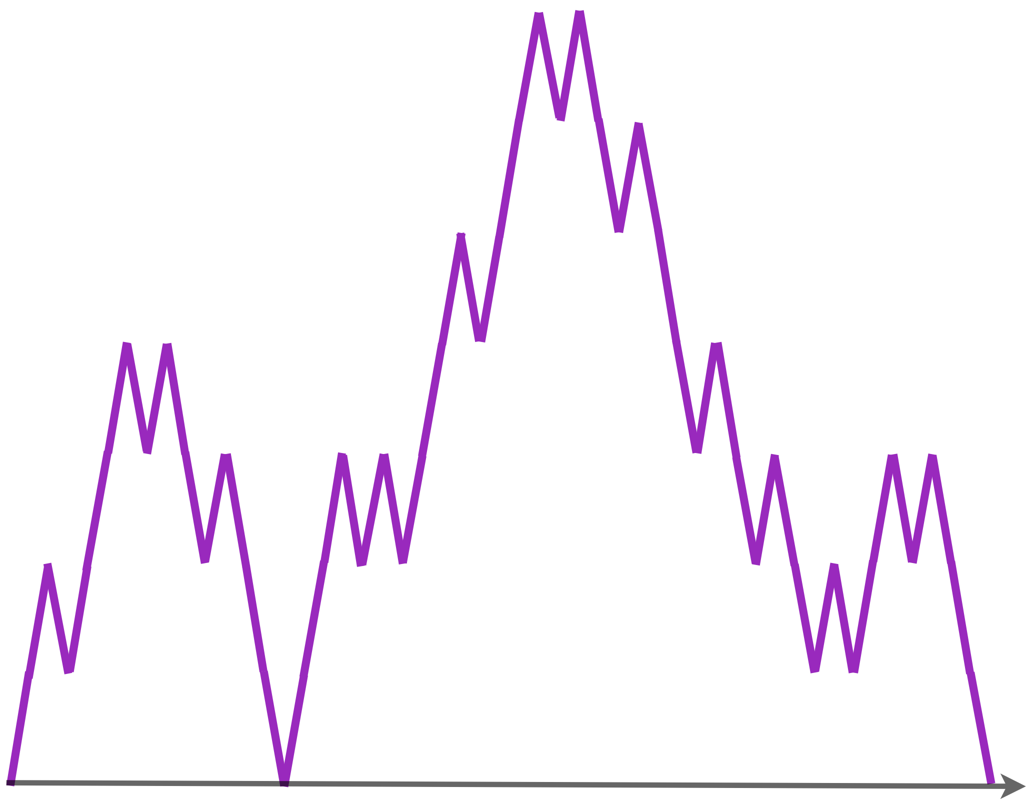
À quoi ressemble un grand BGW arbre aléatoire ?



Codage d'un arbre par sa fonction de contour

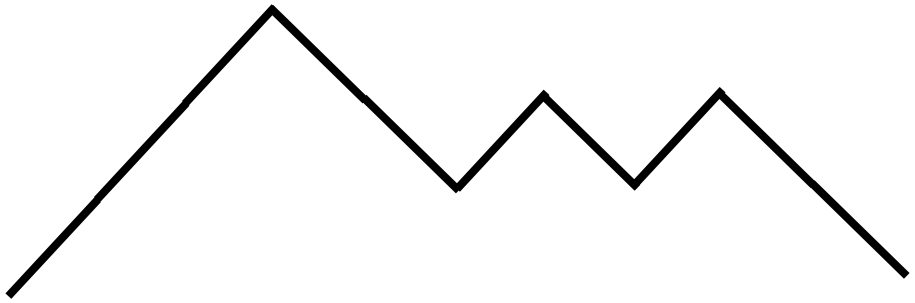
On code un arbre τ par sa fonction de contour $C(\tau)$:





Codage d'un arbre par sa fonction de contour

Connaissant la fonction de contour, il est facile de retrouver l'arbre :



Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée,

Limites d'échelle

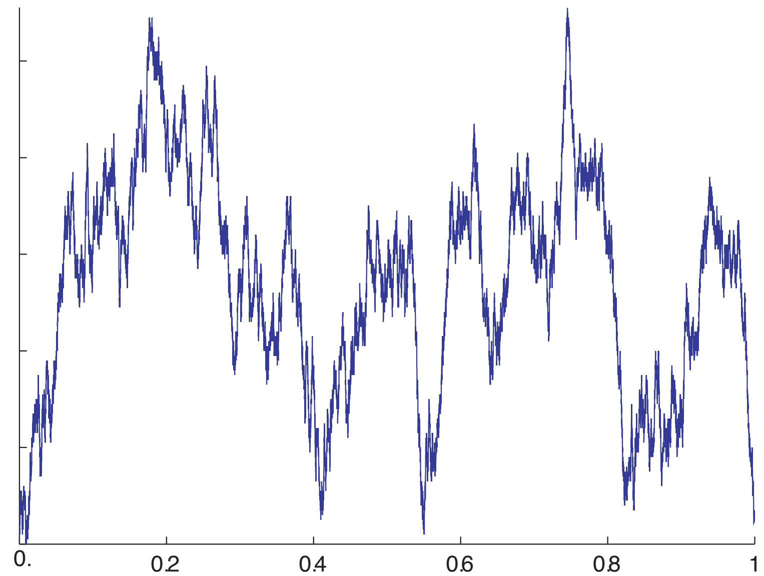
Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0, 1]$.



Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i\geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma}\cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0,1]$.

⇝ Conséquence 1 : pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{2}\cdot \textbf{Hauteur}(\mathcal{T}_n) > a\cdot\sqrt{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(4k^2a^2-1)e^{-2k^2a^2}.$$

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0, 1]$.

Mais peut-on dire que $\mathcal{T}_n$, convenablement mis à l'échelle, converge vers un arbre aléatoire continu limite ?

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0, 1]$.

Mais peut-on dire que $\mathcal{T}_n$, convenablement mis à l'échelle, converge vers un arbre aléatoire continu limite ?

$\leadsto$ Conséquence 2 : Oui, lorsqu'on voit $\mathcal{T}_n$ comme un espace métrique compact en munissant ses sommets de la distance de graphe.

La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z.

La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y

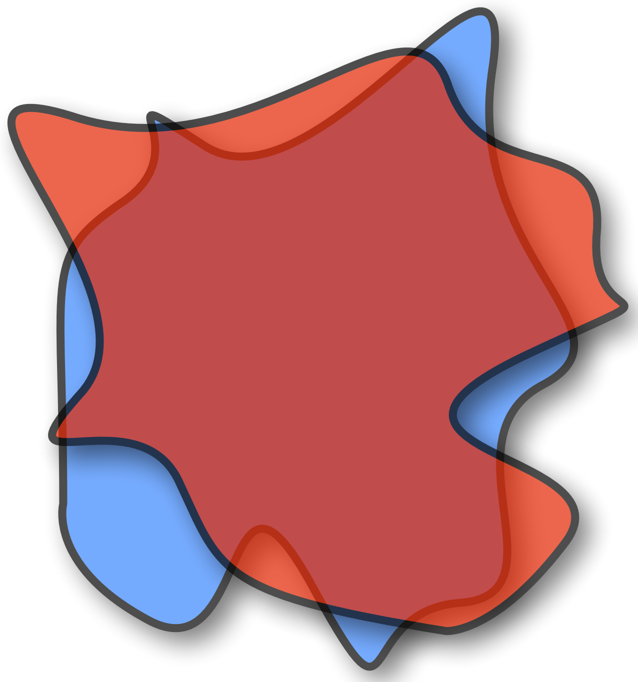
La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y, on pose

$$d_H(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset Y_r \text{ et } Y \subset X_r\}.$$



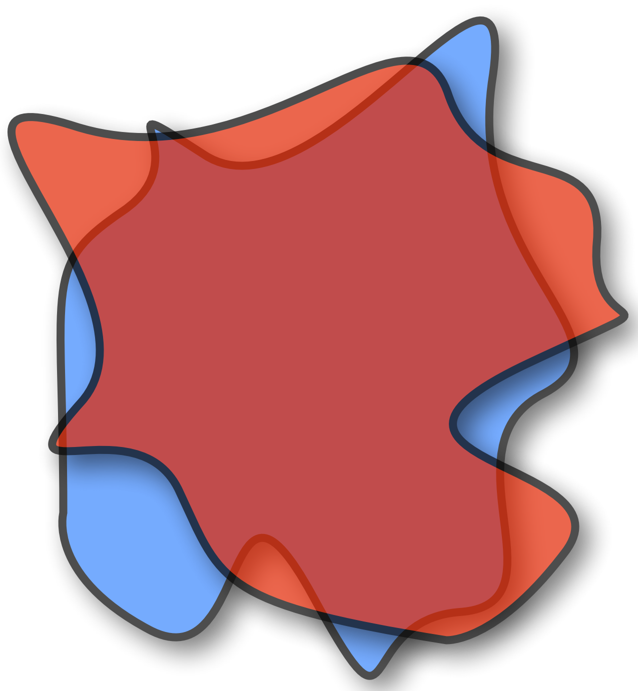
La distance de Hausdorff

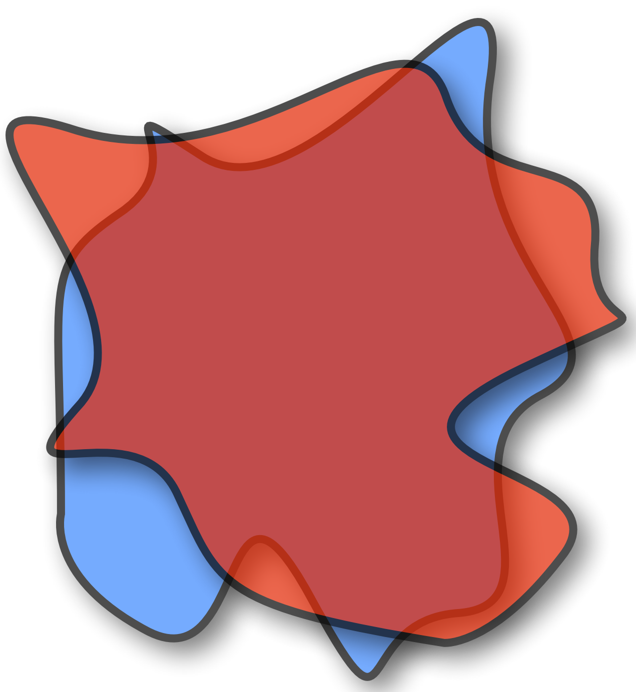
Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y, on pose

$$d_H(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset Y_r \text{ et } Y \subset X_r\}.$$



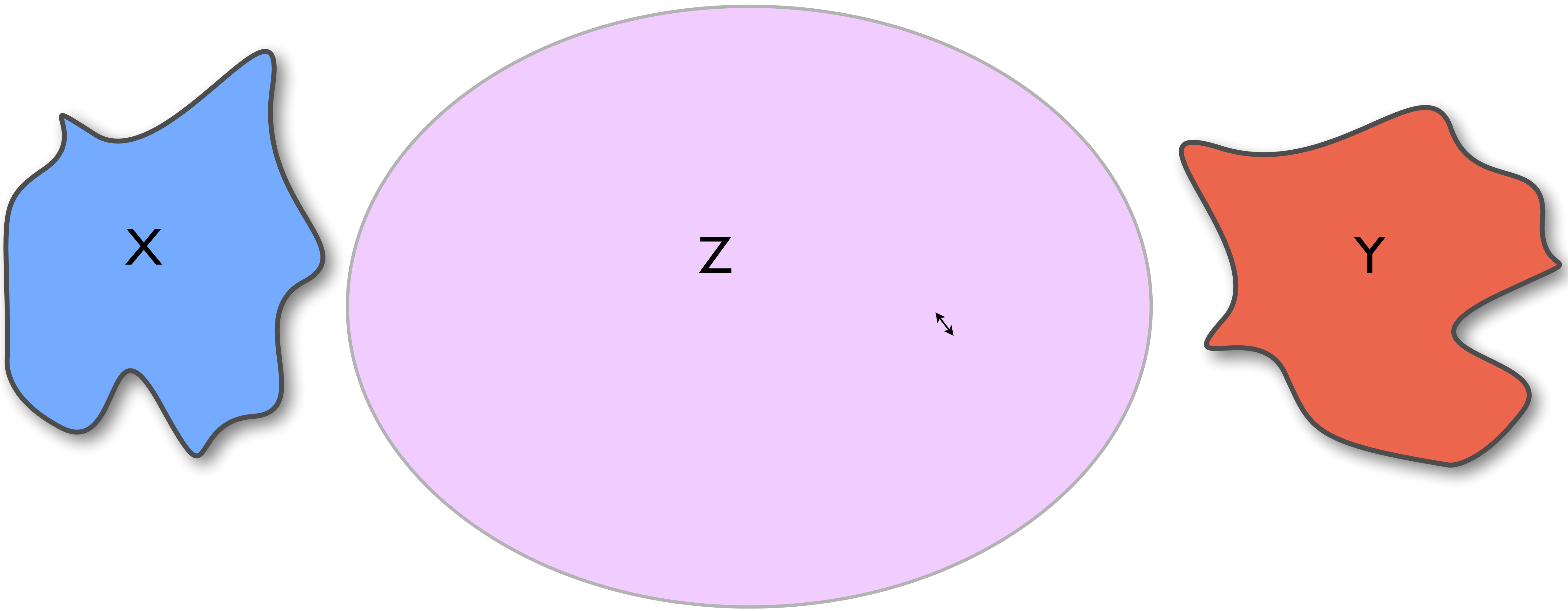


La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts

La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts



La distance de Gromov–Hausdorff entre X et Y est la plus petite distance de Hausdorff entre tous les plongements isométriques possibles de X et Y dans un *même* espace métrique compact Z.

L'arbre brownien

$\rightsquigarrow$ Conséquence du théorème d'Aldous (Duquesne, Le Gall) : il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ tel que la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{e}},$$

ait lieu en loi pour la distance de Gromov–Hausdorff.

L'arbre brownien

$\rightsquigarrow$ Conséquence du théorème d'Aldous (Duquesne, Le Gall) : il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ tel que la convergence

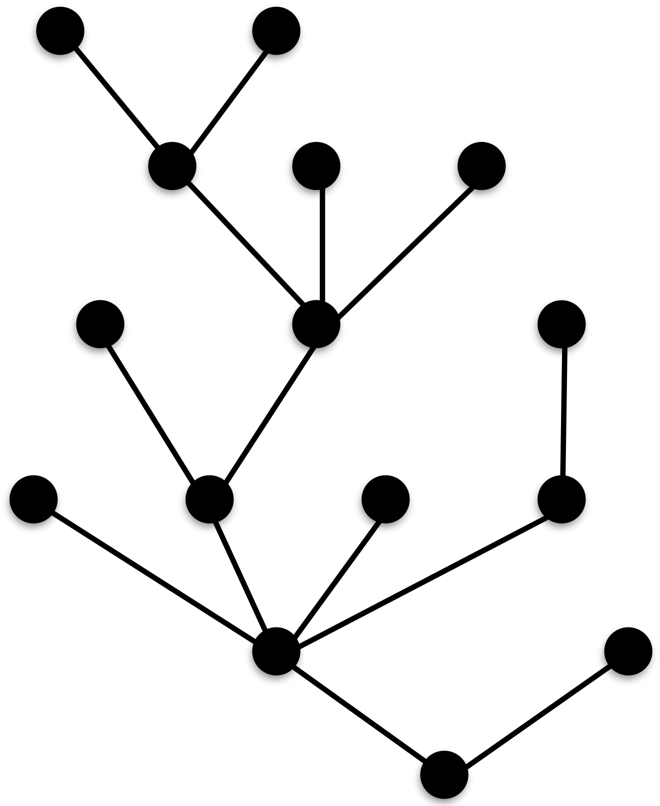
$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{e}},$$

ait lieu en loi pour la distance de Gromov–Hausdorff.

L'espace métrique $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ est appelé *arbre brownien continu*, et est codé par l'excursion brownienne.

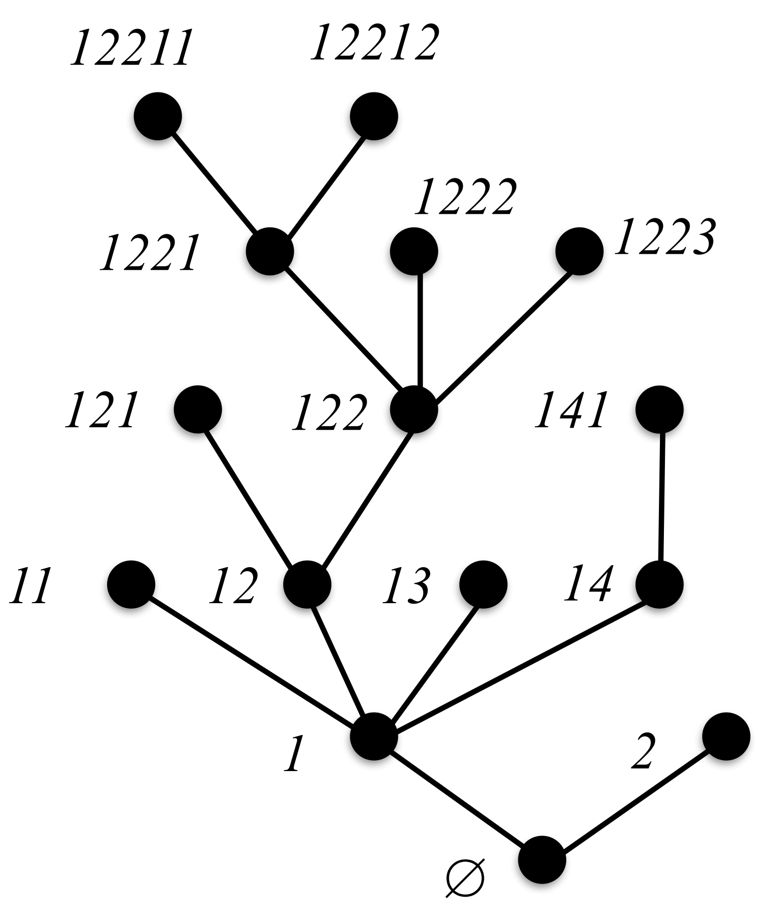
II. Codage par des marches aléatoires

L'ordre lexicographique



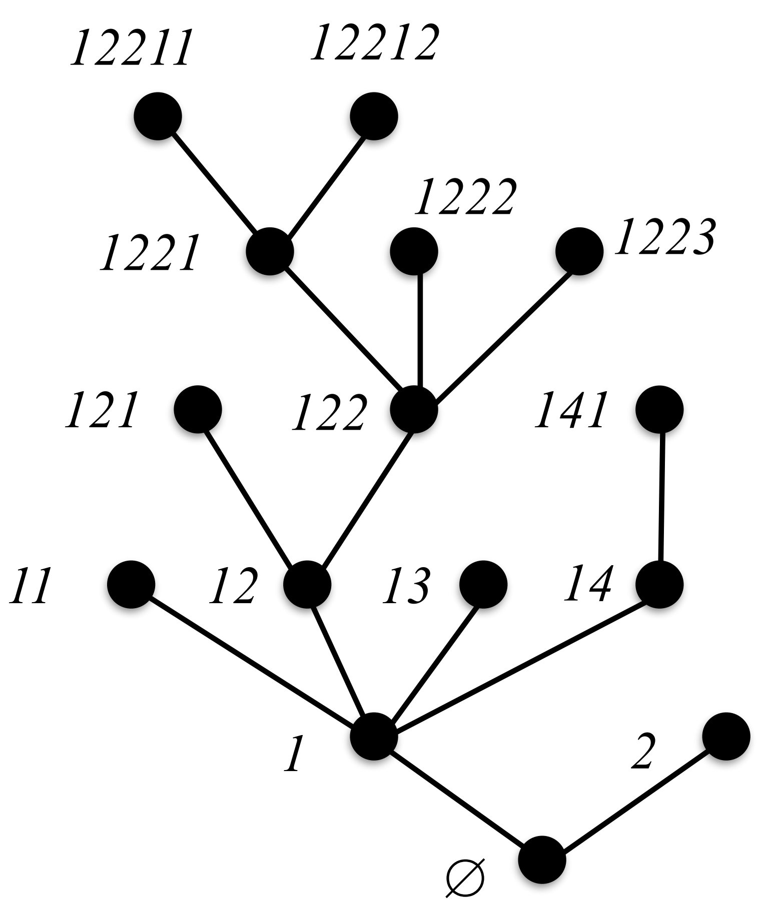
L'ordre lexicographique

On étiquette les sommets d'un arbre τ.



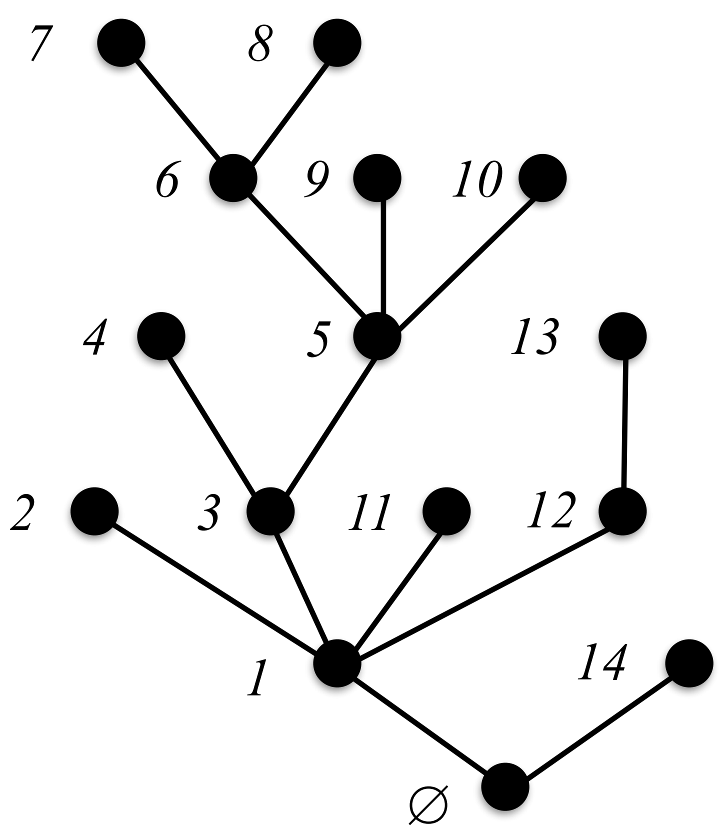
L'ordre lexicographique

On étiquette les sommets d'un arbre τ. On considère ensuite ses sommets ordonnés dans l'ordre lexicographique : $u(0) \prec u(1) \prec \cdots \prec u(|\tau|-1)$, où $|\tau|$ est la taille τ.



L'ordre lexicographique

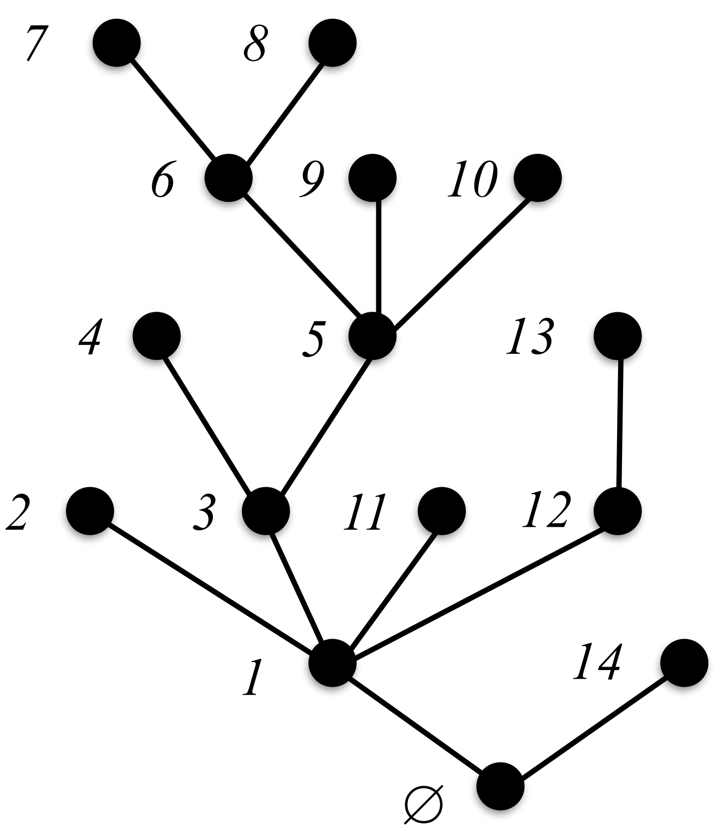
On étiquette les sommets d'un arbre τ. On considère ensuite ses sommets ordonnés dans l'ordre lexicographique : $u(0) \prec u(1) \prec \cdots \prec u(|\tau| - 1)$, où $|\tau|$ est la taille τ.



La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

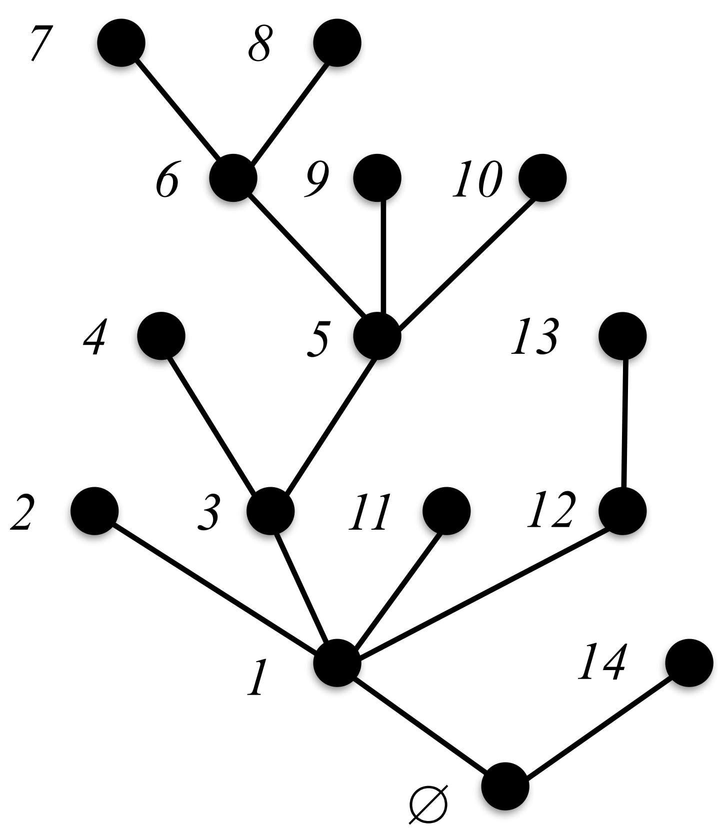


La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \left[\text{nombre d'enfants de } u(i)\right] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.

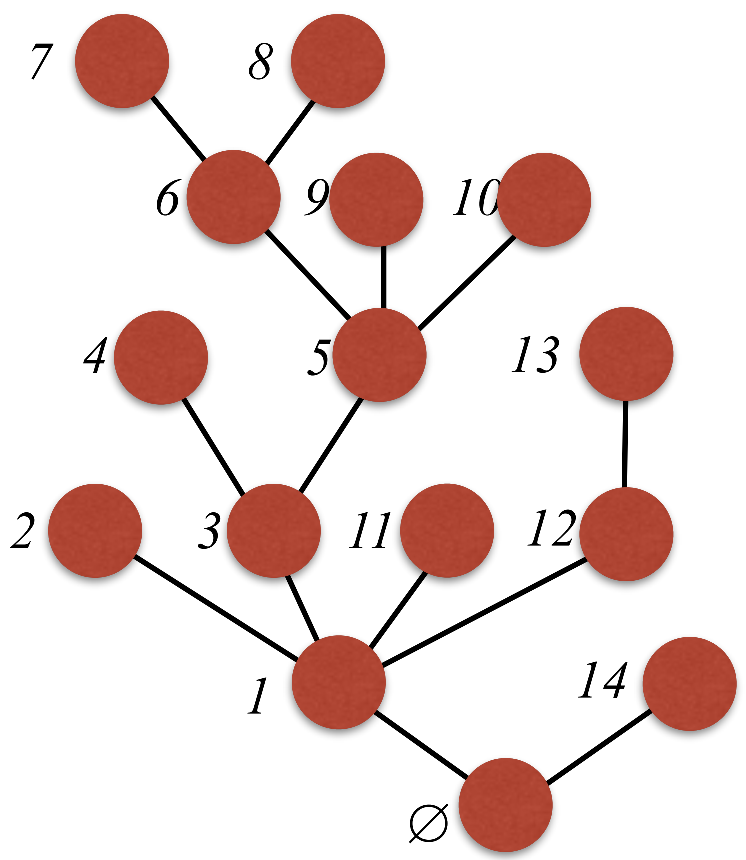


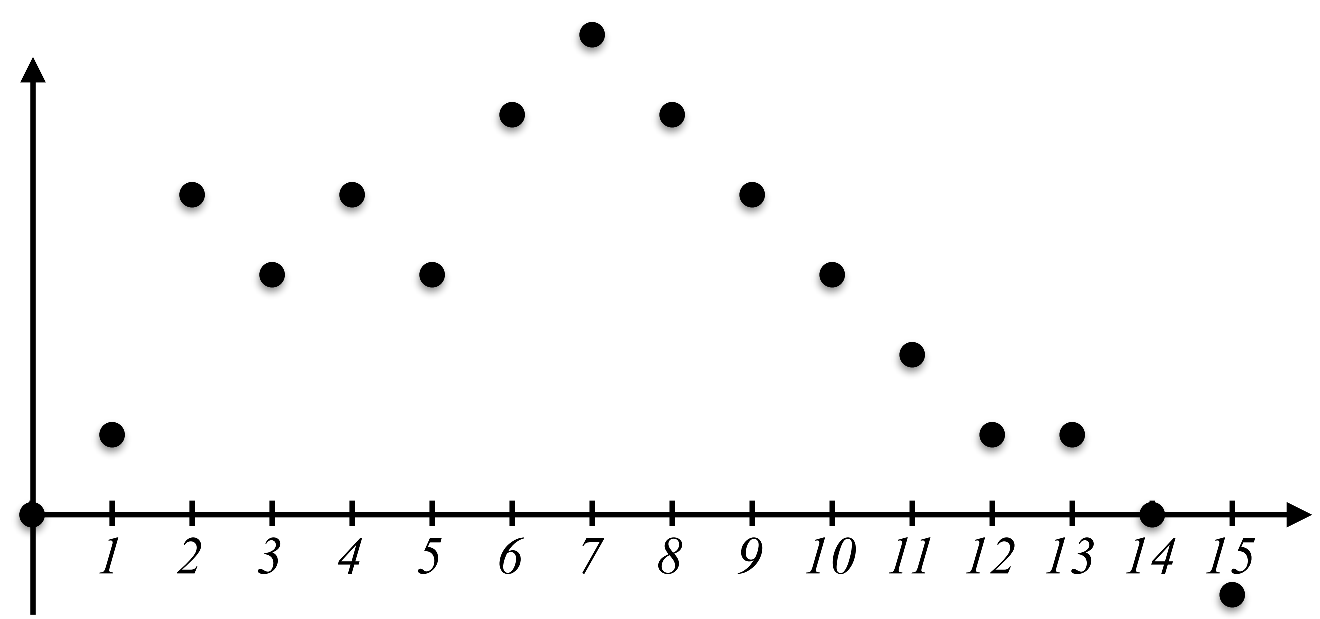
La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \left[\text{nombre d'enfants de } u(i)\right] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.



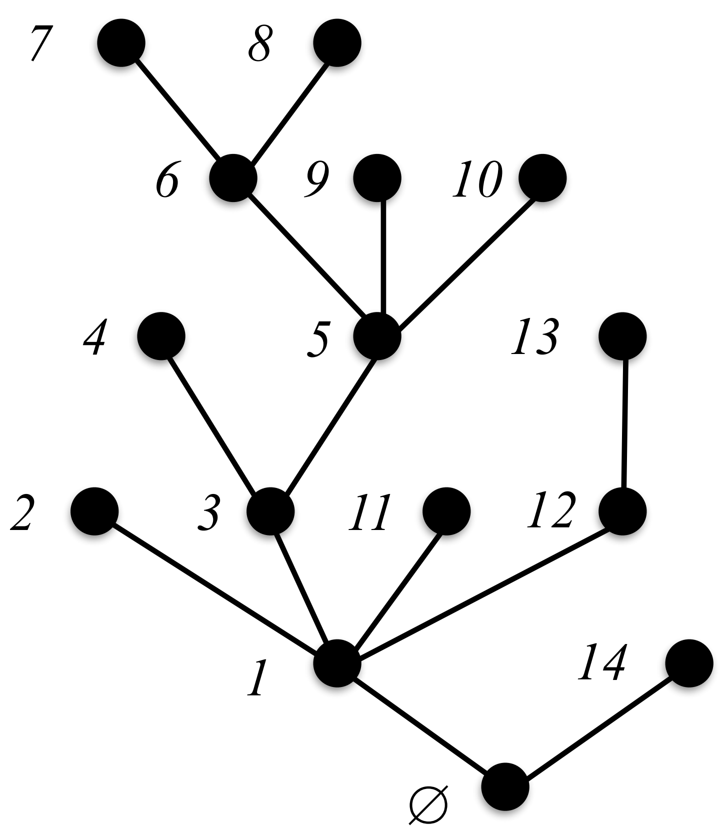


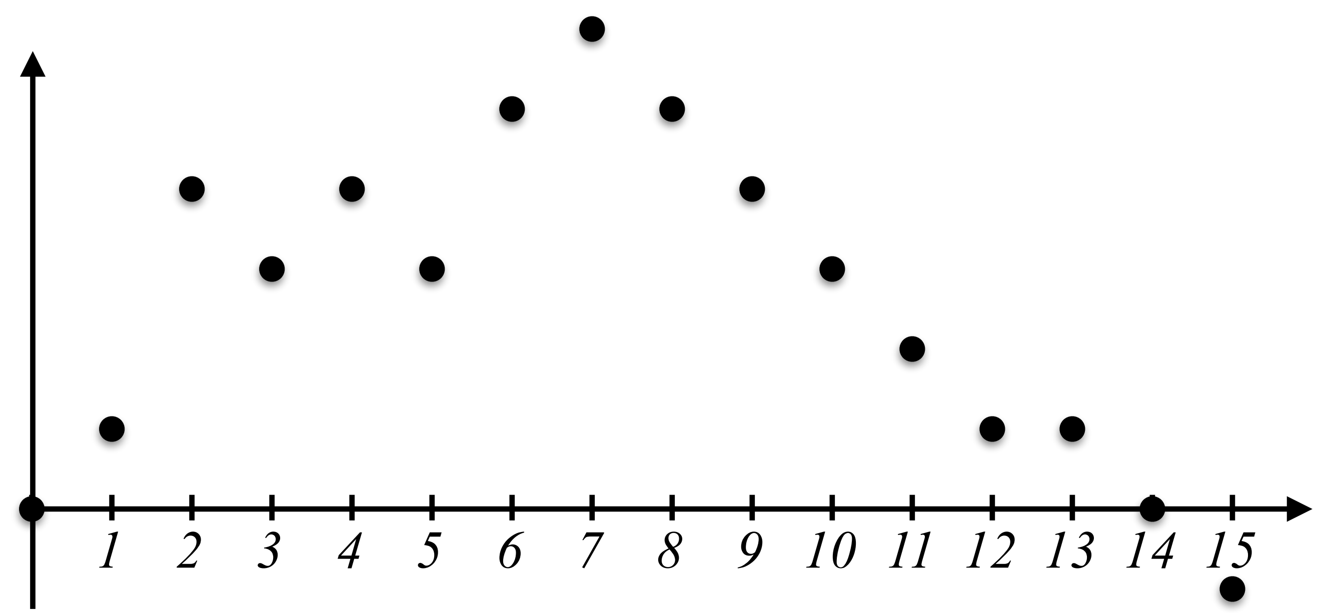
La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \big[\text{nombre d'enfants de } u(i)\big] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.





Fait : $\mathcal{W}_i(\tau) \geqslant 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$, et $\mathcal{W}_{|\tau|}(\tau) = -1$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

Corollaire

(1) La taille d'un BGW_μ arbre a la même loi que ζ_1 : $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

Corollaire

(1) La taille d'un BGW_μ arbre a la même loi que ζ_1 : $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$.

(2) Si $\mathcal{T}_n$ est BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets, $(\mathcal{W}_i(\mathcal{T}_n))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ a la même loi que la marche aléatoire $(W_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, conditionnée à toucher -1 pour le première fois à l'instant n.

Bias de la marche aléatoire sous-jacente

Point clé : la $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$ vérifie :

$$\mathbb{E}[W_1] = \sum_{i \geqslant -1} i\mu(i+1) = \sum_{i \geqslant 0} (i-1)\mu(i) = m - 1$$

où m est la moyenne de μ.

Bias de la marche aléatoire sous-jacente

Point clé : la $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$ vérifie :

$$\mathbb{E}[W_1] = \sum_{i \geqslant -1} i\mu(i+1) = \sum_{i \geqslant 0} (i-1)\mu(i) = m - 1$$

où m est la moyenne de μ.

On montre de même que la variance de W_1 est égale à la variance de μ.

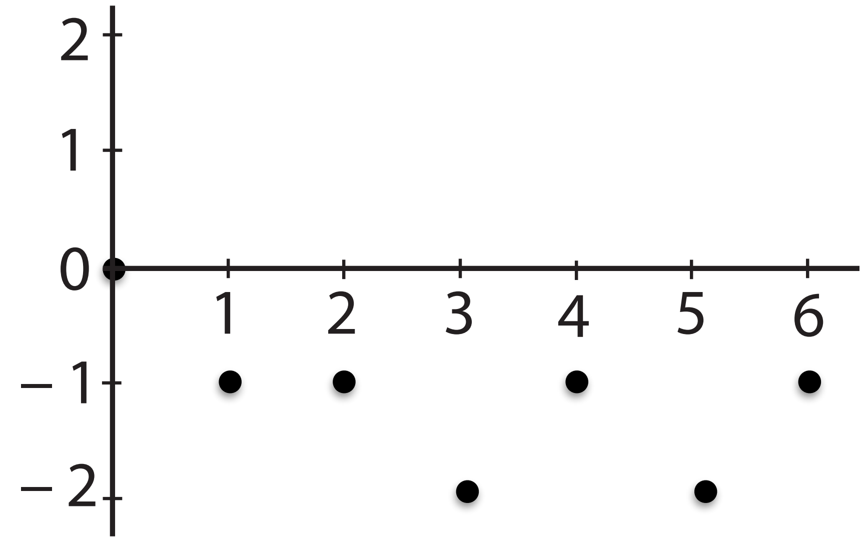
III. Outils pour étudier les marches aléatoires

1) Le lemme cyclique

Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

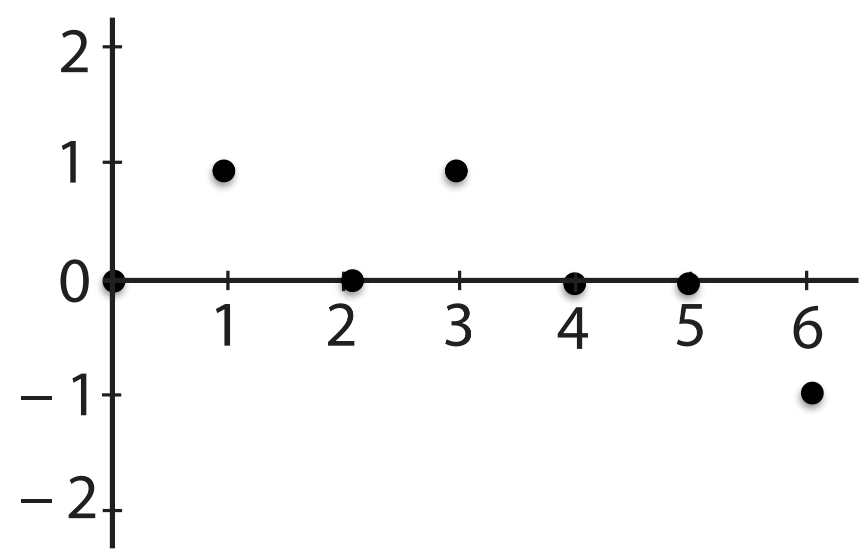


Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$



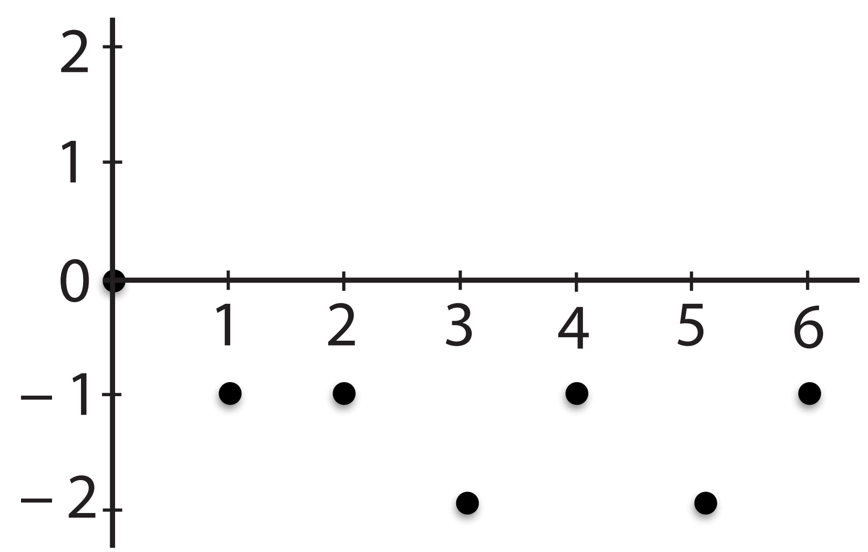
Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})$ (addition modulo n)



Le lemme cyclique

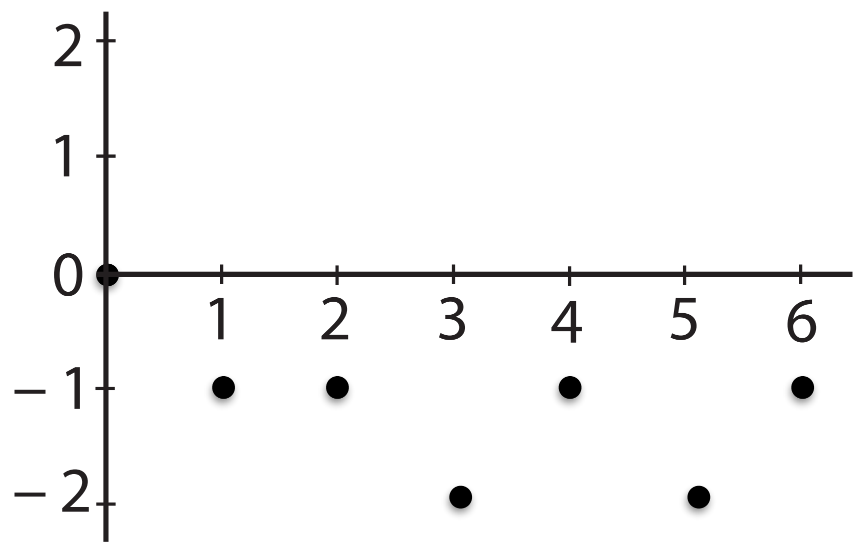
On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \dots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$



Le lemme cyclique

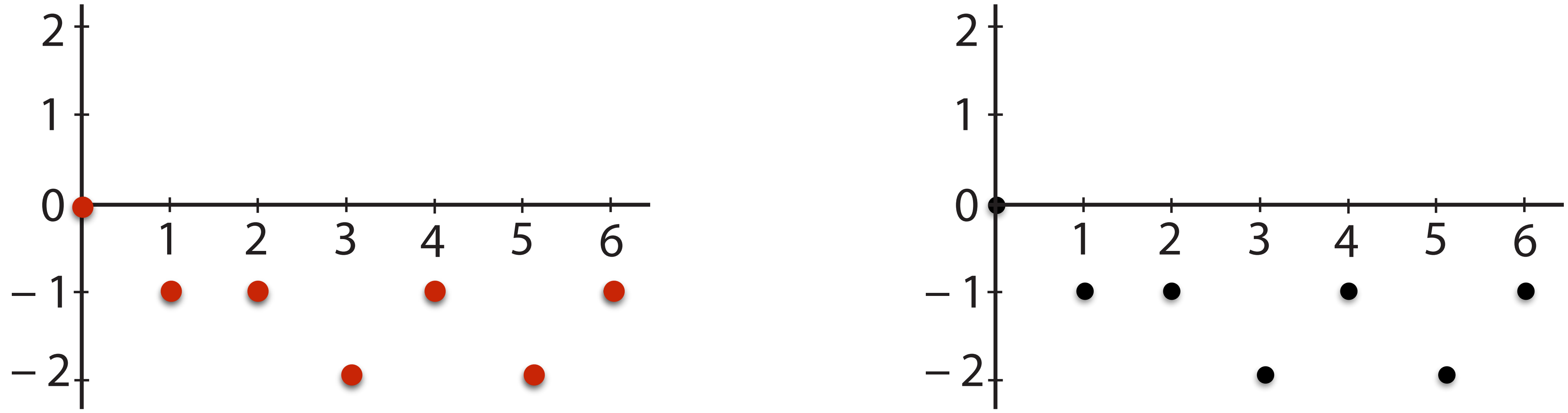
On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$



Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1,\dots,x_n) \in \{-1,0,1,\dots\} : x_1+\cdots+x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \coloneqq \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1+\cdots+x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1},\dots,x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$

Théorème (Lemme Cyclique).

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(1)}$, on a $\mathrm{Card}(I_{\mathbf{x}}) = 1$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right).$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right).$

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \mathbb{P}\left(\zeta_1 = n\right)$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\leadsto$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)$$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)$$

car $\mathbf{X}_n^{(i)}$ et $\mathbf{X}_n$ ont même loi.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\leadsto$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}}\mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right]\end{aligned}$$

car $\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}$ ssi $\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in I_{\mathbf{X}_n}$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right]
\end{aligned}$$

par interversion somme-espérance

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}}\mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n=-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n=-1}\right]
\end{aligned}$$

car $\mathrm{Card}(I_{\mathbf{X}_n}) = 1$ lorsque $W_n = -1$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\leadsto$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1).
\end{aligned}$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \ \text{où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \lambda\leqslant 1\\ s & \text{si} \quad \lambda>1, \text{ où } s\in]0,1[\text{ vérifie } s=e^{\lambda(s-1)}.\end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_μ arbre. Montrons que $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}|=n\right)=\frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!}$.

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \ \text{où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

⇝ Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_{μ} arbre.
Montrons que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}$.
⇝ D'après ce qu'on vient de voir,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n + n = n-1).$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

⇝ Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_μ arbre. Montrons que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}$.
⇝ D'après ce qu'on vient de voir,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n + n = n - 1).$$

⇝ Mais $W_n + n$ a la même loi qu'une somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre λ, et suit donc une loi de Poisson de paramètre λn. Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}.$$

2) Le théorème Local Limite

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$.

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0,\infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left(Z_n = k\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite).

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Corollaire

Si μ est une loi de reproduction critique et de variance finie σ^2, alors

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad \underset{n \to \infty}{\sim} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0,\infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\,\mathbb{P}\left(Z_n = k\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Corollaire

Si μ est une loi de reproduction critique et de variance finie σ^2, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

En effet, $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$ et $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'après le théorème local limite.

Idée de preuve

↝ Idée : exprimer $\mathbb{P}\left(Z_n = k\right)$ comme une intégrale.

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.

- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.
- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.
- On a

$$\mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{itj}\mathbb{P}(Z_n = j).$$

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.
- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.
- On a

$$\mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{itj} \mathbb{P}(Z_n = j).$$

- Donc

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \phi(t)^n dt.$$

IV. Applications aux BGW arbres

1) Nombre de feuilles

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW$_\mu$ arbre conditionné à avoir n sommets.

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0)+\mu(1)<1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0)+\mu(1)<1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n}-1\right|>\epsilon\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0)+\mu(1)<1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n}-1\right|>\epsilon\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

$\rightsquigarrow$ Idée de la preuve : $\lambda(\mathcal{T}_n)$ a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $\zeta_1=n$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n} - 1 \right| > \epsilon \right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

$\rightsquigarrow$ Idée de la preuve : $\lambda(\mathcal{T}_n)$ a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $\zeta_1 = n$, qui a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $W_n = -1$.

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{L_n}{\mu(0)n} - 1 \right| > \epsilon \right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

$\rightsquigarrow$ Or

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon, W_n = -1\right)}{\mathbb{P}(W_n = -1)}.$$

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

$\rightsquigarrow$ Or

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon, W_n = -1\right)}{\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) \leqslant \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right)}{\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)}.$$

Comme $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \to \infty$, ceci montre que $\mathbb{P}(|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1| > \epsilon \mid W_n = -1) \to 0$.

2) Exercice 4

Exercice 4.[Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \mathrm{Card}(f([\![1, n]\!]))$. Des essais numériques montrent que la loi de Y_n est très bien approchée par une loi normale.

Est-il exact que $(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])/\sqrt{n}$ tend vers une loi normale ?

Exercice 4.[Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \mathrm{Card}(f([\![1, n]\!]))$. Des essais numériques montrent que la loi de Y_n est très bien approchée par une loi normale.

Est-il exact que $(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])/\sqrt{n}$ tend vers une loi normale ?

$\leadsto$ Oui (Kolchin 1986). Idée : treaduire le problème en terme d'occupation d'urnes.

Notons $A_n^{(i)}(f) = \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

$\rightsquigarrow$ Notons $A_n^{(i)}(f) = \text{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \dots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \dots, P_n) \qquad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

$\rightsquigarrow$ Soit $Y_n(f) = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

⇝ Notons $A_n^{(i)}(f) = \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

⇝ Soit $Y_n(f) = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

⇝ En appliquant les techniques précédentes, on voit que $\mathbb{E}[Y_n] \sim e^{-1} \cdot n$.

$\rightsquigarrow$ Notons $A_n^{(i)}(f) = \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

$\rightsquigarrow$ Soit $Y_n(f) = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

$\rightsquigarrow$ En appliquant les techniques précédentes, on voit que $\mathbb{E}[Y_n] \sim e^{-1} \cdot n$. Il faut travailler un peu plus pour avoir les fluctuations gausiennes...