Projet de simulation MAP311 – X2016

Percolation de premier passage sur un graphe complet

Sujet proposé par Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Les courbes et graphiques demandés dans les questions de simulation doivent être rendus avec le projet, et doivent donner lieu à des commentaires, qui seront pris en compte dans la note du projet. Les paramètres utilisés doivent être précisés. Toute initiative personnelle est fortement encouragée. Les fichiers sources (.py) des programmes doivent être envoyés par email.

*Les questions **T** sont théoriques, les questions **S** relèvent de la simulation.*

Considérons n antennes de télécommunication $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans une ville. Un signal émis par A_i met un temps $T_{i,j}$ pour attendre A_j (on suppose que $T_{i,j} = T_{j,i}$ pour $i \neq j$, et $T_{i,i}$ n'est pas défini). Pour simplifier les notations, on écrira $T_{i,j}$ à la place de $T_{i,j}$. On suppose que les variables aléatoires $(T_{i,j})$ sont des variables aléatoires positives indépendantes et de même loi, telles que $\mathbb{P}(T_{i,j} \leq t) = t + o(t)$ lorsque $t \to 0$.

Le vilain Dr. No a décidé de hacker une antenne pour que celle-ci propage un virus. Afin de pouvoir réagir à temps, on souhaite étudier, lorsque n est grand, le temps qu'il faut au virus pour se propager à une autre antenne dans les trois cas suivants :

(i) lorsque le Dr. No hacke l'antenne A_1,

(ii) lorsque le Dr. No hacke l'antenne qui l'avantage le plus,

(ii) lorsque le Dr. No hacke l'antenne qui nous avantage le plus.

Pour cela, pour $1 \leq i \leq n$, on note

$$Z_i = Z_i^{(n)} = \min_{1 \leq j \leq n} T_{i,j}$$

le temps qu'il faut au virus pour se propager à une autre antenne si le Dr. No hacke l'antenne i (on écrit Z_i à la place de $Z_i^{(n)}$ pour simplifier les notations). Ainsi, nous allons étudier le comportement des trois quantités suivantes :

$$Z_1, \qquad \min_{1 \leq i \leq n} Z_i, \qquad \max_{1 \leq i \leq n} Z_i.$$

(1,**T**) Démontrer que nZ_1 converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

(2,**S**) Illustrer la convergence en loi précédente par des simulations. Étudier par des simulations si $n\mathbb{E}[Z_1]$ converge lorsque $n \to \infty$.

(3,**T**) Démontrer que, pour une certaine valeur de α qu'on déterminera, $n^\alpha \min_{1\leq i\leq n} Z_i$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, et identifier la loi limite.

L'intermède qui suit sera utile pour étudier $\max_{1\leq i\leq n} Z_i$.

Intermède. Soit $p_n \in]0,1[$. On construit un graphe aléatoire (non orienté) $\mathcal{G}_n$ ayant pour sommets $1, 2, \ldots, n$ comme suit : pour $i \neq j$, avec probabilité p on place une arête entre i et j et avec probabilité $1-p$ on ne place pas d'arête entre i et j (on fait cela indépendamment pour toutes les paires $\{i,j\}$ avec $i \neq j$). Le but de cet intermède est d'estimer la probabilité qu'il existe un sommet isolé dans $\mathcal{G}_n$ (c'est-à-dire sans voisin). Notons S le nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}_n$, et posons $X_i = 1$ si i est isolé et $X_i = 0$ sinon (de sorte que $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$).

(4,**T**) Montrer que $\mathbb{E}[S] = n(1-p_n)^{n-1}$.

(5,**T**) Lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 1$, montrer que $\mathbb{P}(S = 0) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Le but est maintenant de démontrer que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, alors $\mathbb{P}(S = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(6,**T**) Soit Y une variable aléatoire positive ayant un moment d'ordre 2 fini. Montrer que

$$\mathbb{P}(Y = 0) \leq \frac{\mathsf{Var}(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}.$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec un paramètre judicieusement choisi.

(7,**T**) Calculer $\mathbb{E}[S^2]$.

(8,**T**) Conclure que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, on a $\mathbb{P}(S = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(9,**S**) Pour différentes valeurs de n, lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$, tracer le graphe de $\mathbb{P}(S = 0)$ en fonction de c.

Revenons maintenant au Dr. No :

(10,**T**) Démontrer que $\frac{n}{\ln(n)} \max_{1\leq i\leq n} Z_i$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Indication. Pour des valeurs de $t > 0$ judicieusement choisies, on pourra considérer le graphe où i et j sont reliés par une arête si et seulement si $T_{i,j} \leq t$.

(11,**S**) Illustrer la convergence précédente avec des simulations. Étudier par des simulations si $\frac{n}{\ln(n)}\mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} Z_i\right]$ converge lorsque $n \to \infty$.

Question facultative :

(12,**S**) Notons Y_i le temps nécessaire pour que le virus ait contaminé toutes les antennes lorsque le Dr. No hacke l'antenne i. Étudier par des simulations le comportement de

$$\frac{n}{\ln(n)} Y_1 \qquad \text{et de} \qquad \frac{n}{\ln(n)} \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$$

lorsque $n \to \infty$. Que cela signifie-t-il intuitivement sur la "géométrie" du réseau de télécommunication ?