X2016 – MAP 311 – PC 6

RAPPELS : Fonctions caractéristiques et convergence en loi

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Fonctions caractéristiques (Partie 6.1 du poly)

Les fonctions caractéristiques sont très utiles pour étudier les lois de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (avec $k \geq 1$).

Définition. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, sa fonction caractéristique est l'application ϕ_X définie par

$$\begin{array}{rccc} \phi_X : & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & u & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X}\right] \end{array}$$

où $u \cdot v$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$. La fonction caractéristique est toujours une fonction continue.

Caractérisations de lois. Les fonctions caractéristiques sont utiles pour identifier des lois et pour démontrer que des variables sont indépendantes :

– si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,

$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_X(u) = \phi_Y(u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^k.$$

En pratique, pour identifier la loi de X, on peut calculer la fonction caractéristique de X et essayer de reconnaître la fonction caractéristique d'une loi classique.

– si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et Y est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$,

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_{(X,Y)}((u,v)) = \phi_X(u) \cdot \phi_Y(v) \quad \forall u \in \mathbb{R}^k, \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Dans l'encadré précédent, $\phi_{(X,Y)}((u,v))$ signifie $\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X + iv\cdot Y}\right]$.

Calculs de moments. Sous réserve d'existence de moments, la dérivation de fonctions caractéristiques permet de les calculer, voir Proposition 6.1.10 du Poly.

2 Convergence en loi (partie 6.3 du poly)

La notion de convergence en loi est une convergence assez faible pour laquelle les variables aléatoires ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité.

Définition. Soient $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (ou plus généralement dans un même espace métrique) qui ne sont pas forcément définies sur le même espace de probabilité. On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction *continue bornée* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(X)].$$

Attention. La notion de convergence en loi n'implique que la **loi** des variables aléatoires, ce qui n'est pas le cas de la convergence p.s., en probabilité et en moyenne. En particulier, il y a un abus de langage à dire que la suite de v.a. (X_n) converge en loi vers X, car la v.a. limite X n'est pas définie de manière unique : seule sa loi P_X l'est.

Attention. Pour la convergence en loi, les variables aléatoires mises en jeu ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité, ce qui rend la convergence en loi très différente des autres convergences vues précédemment.

3 En pratique, comment montrer la convergence en loi ?

Soient $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Approche fonctionnelle. Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X, il suffit de démontrer que $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction f qui appartient à l'une des classes suivantes

- les fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ (c'est la définition),
- les fonctions continues continues à support compact de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$,
- les fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$,
- les fonctions lipschitziennes bornées de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$,

(Ceci provient de résultats d'approximations de fonctions continues bornées par des fonctions plus régulières.)

Approche avec les fonctions de répartition. Si k =1 (c'est-à-dire qu'on travaille avec des variables aléatoires réelles), en notant F_Y la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle Y, alors X_n converge en loi vers X **si et seulement si** $F_{X_n}(u) \to F_X(u)$ en tout point $u \in \mathbb{R}$ **où F_X est continue** (Proposition 6.3.5 du poly).

Attention. Si la variable aléatoire limite X est inconnue, on calcule la limite $F(u)$ de $F_{X_n}(u)$ lorsque $n \to \infty$ et on regarde s'il existe une variable aléatoire X telle que F_X est égale à F en tout point où F_X est continue (il est alors parfois utile d'utiliser le fait que les points de discontinuités d'une fonction de répartition sont au plus dénombrables).

Approche avec les fonctions caractéristiques. Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X, il suffit de démontrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, on a $\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X_n}\right] \to \mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X_n}\right]$ (théorème de Lévy, théorème 6.3.9 du poly).

Si la variable aléatoire limite est inconnue, on calcule la limite $\psi(u)$ de $\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X_n}\right]$ lorsque $n \to \infty$. On arrive souvent à reconnaître ψ comme la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X (et alors X_n converge en loi vers X). Si on ne reconnaît pas ψ, on regarde si ψ est continue en 0. En effet (deuxième partie du théorème de Lévy), X_n converge en loi si et seulement si ψ est continue en 0.

Approche par composition. Si (X_n) converge en loi vers X et si f est une fonction **continue**, alors $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$ (Exercice 3 de la PC 6).

On peut démontrer que ce résultat reste vrai si on suppose seulement que f est presque sûrement continue en X. Par exemple, si X_n, X sont des variables aléatoires réelles positives telles que $\mathbb{P}(X=0) = 0$ et X_n converge en loi vers X, alors $\frac{1}{X_n} \to \frac{1}{X}$ en loi (la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais comme $X \neq 0$ p.s., f est bien p.s. continue en X).

Approche par convergence jointe. Si X_n converge en loi vers X et Y_n converge en loi vers Y et si Y est une variable aléatoire constante (càd il existe c tel que $\mathbb{P}(Y = c) = 1$), alors $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi (lemme de Slutsky, exercice 12 de la PC 6).

Attention. Il n'est pas vrai en général que si $X_n \to X$ en loi et que si $Y_n \to Y$ en loi, alors $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi (voir l'exercice 12 de la PC 6), contrairement aux convergences presque sures et en probabilité !

En démontrant une convergence plus forte. Si X_n converge vers X presque sûrement, en probabilité ou en moyenne, alors X_n converge en loi vers X.

Approche par le TCL. On suppose que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de carré intégrable. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et on suppose que $\sigma^2 > 0$ (sinon les variables aléatoires sont constantes). Alors, en posant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (théorème Central Limite, théorème 6.4.1 du poly).

On peut démontrer que cette convergence n'a pas lieu en probabilité (exercice 14 de la PC 6).