X2016 – MAP 311
PC 2 – Lundi 24 avril 2017 – Variables aléatoires réelles

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311 *un peu après la PC.*

Exercice 1. **(Petites questions)**

(1) Est-ce que l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ forme une tribu ?

(2) On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(3) Soit X une variable aléatoire réelle. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux boréliens disjoints. Que vaut $\mathbb{P}(X \in A \text{ et } X \in B)$?

(4) Soit $(E, \mathcal{E}, \mathbb{Q})$ un espace probabilisé. Existe-t-il une variable aléatoire dont la loi est $\mathbb{Q}$? (autrement dit, existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ dont la loi est $\mathbb{Q}$?)

1 Variables aléatoires réelles

Exercice 2. (**Identification d'une loi**) Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Exercice 3. (**Identification d'une loi**) Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\lfloor aX \rfloor + 1$?

(pour un nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)

Exercice 4. (**Théorème de transfert**) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer $\mathbb{E}\left[e^U\right]$.

Exercice 5. (**Intégrable ou pas intégrable ?**) Soit Z une variable aléatoire réelle de Cauchy (de densité $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$). Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}$ la variable aléatoire Z^α est-elle intégrable ?

Exercice 6. (**À densité ou pas à densité ?**) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et $a > 0$. La variable aléatoire $\min(X, a)$ est-elle une variable aléatoire à densité ?

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Identifier la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

3 Exercice à chercher pour le mercredi 10 mai

Exercice 9. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose

$$S = \frac{n+1}{n} \cdot \max(U_1, \ldots, U_n).$$

Calculer l'espérance et la variance de S.

4 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 10. Le cycle d'un feu de circulation est le suivant : le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et rouge sur $]v, v+r]$ avec $v, r > 0$. L'instant d'arrivée U de Zoé est supposé uniformément réparti sur le cycle $[0, r+v]$.

(1) Exprimer en fonction de U le temps d'attente T de Zoé au feu dans le cas où aucun vehicule ne se trouve devant le feu à l'instant où elle arrive.

(2) Déterminer la fonction de répartition de T. Est-ce une variable aléatoire discrète ou à densité ?

Exercice 11. (**Particule dans un puit de potentiel, loi d'Arrhénius et loi de Pareto**) On considère une particule dans un puit de potentiel de barrière d'énergie E positive. La loi d'Arrhénius donne le temps de sortie $\tau(E)$ en fonction de E de la particule hors du puit dû aux fluctuations thermiques :

$$\tau(E) = \tau_0 \, e^{\frac{E}{k_B T}}.$$

Ici, la constante τ_0 est un temps de référence caractéristique, T est la température absolue, et k_B est la constante de Boltzmann. On suppose que la barrière est décrite par une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/E_0$, où E_0 est une énergie de référence. Le temps de sortie de la particule est alors une variable aléatoire notée Y :

$$Y := \tau(X),$$

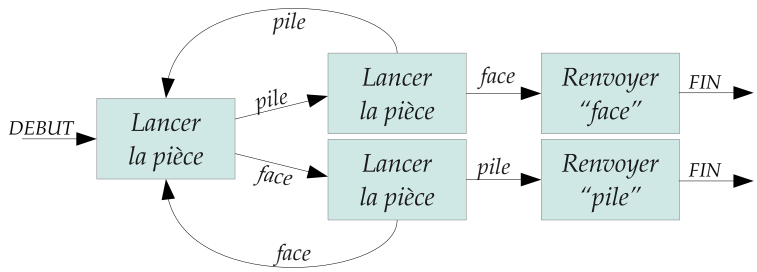
où $\tau(x) = \tau_0 \, e^{\frac{x}{k_B T}}$.

(1) Déterminer la loi Y.

(2) Montrer que pour tout $t' > 0$ on a $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(Y > t + t' | Y > t) = 1$. Interpréter ce résultat.

Remarque. la loi de Y est la loi de Pareto. C'est une loi de puissance qui a des applications non seulement en physique mais aussi en sciences sociales, en gestion de qualité, etc.

Exercice 12. (**Détruquer une pièce**) On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité p et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant :



On note $T \in \{2, 4, 6, \dots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{$« pile », « face »$\}$ le résultat de l'algorithme.

(1) Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?

(2) Démontrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1}\, 2p(1-p),$$
en déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement : $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

(3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = $ « pile »$) = 1/2$.

(4) Démontrer que $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p(1-p)}$.

Exercice 13. (**Générer une loi uniforme avec des variables de Bernoulli**) Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On pose $Z = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.

(1) On note
$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{2^k} : n \geq 1, i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\} \right\}$$
l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$, qui sont denses dans $[0,1]$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ dont la fonction de répartition F_Y vérifie $F_Y(t) = t$ pour tout $t \in \mathcal{D}$. Montrer que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(2) Montrer que pour tous $i_1, \dots, i_p \in \{0, 1\}$ on a
$$\mathbb{P}\Big(X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p\Big) = \mathbb{P}\left(Z \in \left[\sum_{i=1}^{p} i_j 2^{-j}, \sum_{j=1}^{p} i_j 2^{-j} + 2^{-p}\right]\right).$$

En déduit que que Z est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(3) Réciproquement, montrer que si Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, alors les bits de son écriture en base 2 forment une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

(4) Que se passe-t-il en base $b \geq 3$ avec la loi uniforme sur $\{0,\dots,b-1\}$?

5 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 14. (**Support d'une loi**) Soit X une variable aléatoire réelle.

(1) On suppose que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{P}(X \in A) \in \{0,1\}$. Montrer que X est presque-sûrement constante (c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$).

(2) On suppose que l'ensemble $\{\mathbb{P}(X \in A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est dénombrable. Montrer que p.s. X ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs (c'est-à-dire, il existe un ensemble dénombrable Γ tel que $\mathbb{P}(X \in \Gamma) = 1$).

Exercice 15. **(Une question de mesurabilité)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements (on rappelle que cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Exercice 16. **(Exemple d'ensemble non mesurable)** Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0,2\pi]$). On voit $[0,2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).

Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.

(2) En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.