Projet de simulation MAP311 – X2015

Règlement de comptes à OK Corral

Sujet proposé par Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Soit $n \geq 1$ un entier. Deux groupes de bandits, chacun constitué de n personnes, se retrouvent à OK Corral pour un règlement de comptes. Tant qu'il reste au moins un bandit vivant dans chaque groupe, à chaque seconde un bandit (choisi uniformément au hasard parmi ceux encore vivants, indépendamment de tout ce qui s'est passé avant) abat un bandit de l'autre groupe. On note $V(n)$ le nombre (aléatoire) de survivants à l'issue de la fusillade.

Le but du projet est d'étudier la vitesse de croissance de $V(n)$ lorsque $n \to \infty$. Les questions **T** sont théoriques, les questions **S** relèvent de la simulation.

(1,**S**) On suppose que $\mathbb{E}[V(n)] \sim cn^{\alpha}$ lorsque $n \to \infty$ pour un certain $\alpha \geq 0$. Estimer α par des simulations.

Appelons G et D les deux groupes de bandits.

(2,**T**) Si, à un moment donné, il y a a bandits dans G et b bandits dans D, quelle est la probabilité qu'un bandit du groupe G soit ensuite abattu en premier ?

(3,**T**) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $1/a$ et Y une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre $1/b$. Que vaut $\mathbb{P}(X < Y)$?

Soient $(G_j)_{j\geq 1}$ et $(D_j)_{j\geq 1}$ des variables aléatoires toutes indépendantes (définies sur le même espace de probabilité) telles que pour tout $j \geq 1$, G_j et D_j sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre $1/j$.

On utilise ces variables aléatoires pour juxtaposer $2n$ morceaux de bois de longueurs différentes comme suit (voir aussi Fig. 1) : on considère un morceau de bois de longueur D_1, on juxtapose à sa droite un morceau de bois de longueur D_2, puis à la droite de ce dernier morceau un autre morceau de bois de longueur D_3, et ainsi de suite jusqu'à un morceau de bois de longueur D_n. Ensuite, on juxtapose à la gauche du morceau de longueur D_1 un morceau de bois de longueur G_1, puis à la gauche de ce dernier morceau un autre morceau de bois de longueur G_2, et ainsi de suite jusqu'à un morceau de bois de longueur G_n. On appelle *origine* le point où les deux morceaux de longueurs D_1 et G_1 se touchent.

On allume ensuite les deux extrémités de sorte que deux feux se propagent à vitesse constante. On éteint les feux dès que l'un des feux atteint l'origine, et on note $R(n)$ le nombre de morceaux de bois qui restent (complets ou incomplets).

(4, **T**) Justifier que $V(n)$ et $R(n)$ ont la même loi.

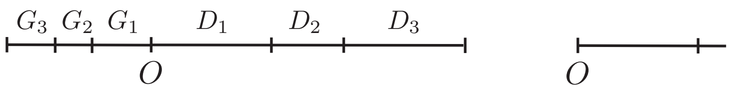

FIGURE 1 – À gauche : exemple d'une juxtaposition pour $n = 3$. À droite : état final lorsque les feux sont éteints. Dans cet exemple, $R(3) = 2$.

On pose pour, $n \geq 1$, $\overline{G}_n = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$, $\overline{D}_n = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$ et $W_n = \overline{G}_n - \overline{D}_n$.

(5, **T**) Montrer que $\overline{G}_n/n^2 \to 1/2$ et que $\overline{D}_n/n^2 \to 1/2$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

On pourra utiliser le résultat suivant (théorème de Kolmogorov) : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire indépendantes (pas forcément de même loi) qui admettent des moments d'ordre un et d'ordre deux finis. Si $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres strictement réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la série de terme général $\mathsf{Var}(X_n)/b_n^2$ converge, alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - \mathbb{E}\left[X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right]}{b_n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

presque sûrement.

(6, **T**) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{itW_n}] = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + j^2t^2}$.

(7, **T**) En déduire que $W_n/n^{3/2}$ converge en loi vers $\sqrt{2/3}\cdot Z$, où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (on pourra écrire $\ln(1 + j^2t^2/n^3) = j^2t^2/n^3 + j^2t^2/n^3 \cdot \epsilon(j^2t^2/n^3)$, avec ϵ une fonction qui tend vers 0 en 0).

On note $L(n) = |W_n|$ la longueur du bois qui reste au moment où on éteint les feux.

(8, **T**) Montrer que $L(n)/n^{3/2}$ converge en loi vers $\sqrt{2/3} \cdot |Z|$.

(9, **T**) Justifier que si $\overline{G}_n > \overline{D}_n$, alors $\overline{G}_{R(n)-1} \leq L(n) \leq \overline{G}_{R(n)}$, et que si $\overline{G}_n < \overline{D}_n$, alors $\overline{D}_{R(n)-1} \leq L(n) \leq \overline{D}_{R(n)}$.

(10, **T**) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(G_{R(n)} > \varepsilon n^{3/2}) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(G_j \geq \varepsilon n^{3/2}) \leq ne^{-\varepsilon\sqrt{n}}$.

(11, **T**) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(G_{R(n)} > \varepsilon n^{3/2})$ converge. En déduire que $G_{R(n)}/n^{3/2} \to 0$ et $D_{R(n)}/n^{3/2} \to 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

(12, **T**) En déduire que $R(n)/n^{\gamma}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers une variable aléatoire qu'on précisera, où γ est une certaine valeur qu'on donnera.

(13, **S**) Illustrer la convergence en loi de la question précédente par des simulations.

(14, **T,S**) Que se passe-t-il si au début on a un groupe de n bandits et un autre groupe de $\lfloor an \rfloor$ bandits, avec $a > 1$?

(15, **S**) On considère dans cette question une variante : maintenant, tant qu'il reste au moins un bandit vivant dans chaque groupe, à chaque seconde, un bandit (choisi uniformément au hasard parmi ceux encore vivants, indépendamment de tout ce qui s'est passé avant) abat un autre bandit (choisi uniformément et indépendamment au hasard parmi ceux encore vivants, sauf lui-même). On note $V'(n)$ le nombre (aléatoire) de survivants à l'issue de la fusillade. Étudier par des simulations le comportement de $V'(n)$ lorsque $n \to \infty$.