X2015 – MAP 311

PC 6 – 6 juin 2016 – Fonctions caractéristiques, convergence en loi

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. (Petites questions)

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle X. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$ pour tout fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que X_n converge en loi vers une certaine variable aléatoire X. Est-ce que $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que X_n converge en loi vers X et telles que X_n converge en loi vers Y. Est-ce que $X = Y$ presque sûrement ?

(4) Soit X une variable aléatoire réelle. On pose $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. Si X est intégrable, montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (mais la réciproque est fausse, cf l'exercice 17).

1 Fonctions caractéristiques

Exercice 2.

(1) Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ.

(2) Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Ce résultat reste-t-il vrai si les variables aléatoires ne sont plus supposées indépendantes ?

Exercice 3. On rappelle qu'une loi de Cauchy a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. On peut démontrer (en utilisant les transformées de Fourier) qu'elle a $\phi(t) = \exp(-|t|)$ pour fonction caractéristique. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Cauchy. Quelle est la loi de

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad ?$$

La loi des grands nombres s'applique-t-elle ?

2 Convergence en loi

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, existe une variable aléatoire X_n dont F_n est une fonction de répartition. Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ?

Exercice 5. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $n\min(X_1,\dots,X_n)$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

Exercice 6. Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n dont F_n est une fonction de répartition. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, et identifier la loi limite.

Exercice 7. Soit $\theta > 0$. On considère une suite $(T_n)_{n\geq n_0}$ de variables aléatoires où T_n suit une loi géométrique de paramètre $p_n = \frac{\theta}{n}$. Montrer que la suite $(T_n/n)_{n\geq n_0}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice 8. **(Équivalence de la convergence en probabilité et en loi vers une variable aléatoire constante)** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c si et seulement si X_n converge en loi vers c.

Indication. Pour la réciproque, on pourra commencer par écrire $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \geq c+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq c+\epsilon)$.

Exercice 9. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

(1) On suppose dans cette question que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

(2) (**Lemme de Slutsky**) On suppose que $Y = a$ est constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, a)$ en loi.

Indications. On pourra utiliser le fait $Y_n \to Y$ en probabilité (exercice 8) et écrire

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[F(X_n,Y_n)] - \mathbb{E}[F(X,a)]| \leq |\mathbb{E}[F(X_n,a)] - \mathbb{E}[F(X,a)]| &+ \mathbb{E}\Big[|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a|\geq\epsilon\}}\Big] \\ &+ \mathbb{E}\Big[|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a|<\epsilon\}}\Big]. \end{aligned}$$

On admettra également que si Z_n est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, alors Z_n converge en loi vers Z si et seulement si pour toute fonction lipschitzienne bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[f(Z_n)] \to \mathbb{E}[f(Z)]$.

(3) Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

3 Exercice à chercher pour la prochaine fois (13 juin)

Exercice 10. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 est de carré intégrable et que $\mathbb{E}[X_1] = 1$. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

4 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 11. Cet exercice présente un modèle pour la contamination au mercure.

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha, \lambda > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_1 > x) \sim \frac{\alpha}{x^\lambda}$ lorsque $x \to \infty$. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $e^{-\alpha y^{-\lambda}} \mathbb{1}_{y>0}$ (loi de Fréchet de paramètre (α, λ)).

(2) Le mercure, métal lourd, est présent dans peu d'aliments. On le trouve essentiellement dans les produits de la mer. L'Organisation Mondiale de la Santé fixe la dose journalière admissible en mercure à $0.71 \mu g$ par jour et par kilo de poids corporel. Des études statistiques [1] donnent la forme de la queue de distribution empirique de la contamination globale annuelle en gramme de mercure pour un individu de 70 kg : $\mathbb{P}(X > x) = \frac{\alpha}{x^\lambda}$ pour x assez grand avec $\alpha = 3.54 \cdot 10^{-9}$ et $\lambda = 2.58$. Seriez-vous étonné–e qu'au moins une personne soit exposée à ce risque sanitaire en France ? À Palaiseau (Recensement 2013 : 31264 personnes) ? Dans une promotion de cinq cents étudiants ? À partir de quelle valeur de n pouvez-vous affirmer, avec seulement 5% de chances de vous tromper : « Parmi ces n personnes, au moins une a un niveau de mercure trop élevé » ?

5 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Cauchy. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Étudier les convergences en loi et en probabilité des suites suivantes.

$$(1) \quad \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \qquad (2) \quad \left(\frac{S_n}{n^2}\right)_{n\geq 1} \qquad (3) \quad \left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}.$$

1. P. Bertail. Evaluation des risques d'exposition ň contaminant alimentaire : quelques outils statistiques. www.crest.fr/doctravail/document/2002-41.pdf (2002).

Indication. Pour la troisième suite, on pourra déterminer la loi de $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$, raisonner par l'absurde et montrer qu'alors la suite $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 13. (**Loi faible, non forte**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2\ln(n+1)n}$. On pose $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

(1) Montrer que Y_n converge en probabilité vers 0. *Indication.* On pourra étudier $\mathbb{E}[Y_n^2]$.

(2) Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Exercice 14. Déterminer la limite de $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. On pourra utiliser le théorème central limite.

Exercice 15. (**Le TCL n'est pas une convergence en probabilité**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$.

(1) Rappeler la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que la suite $(Z_{2n} - Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.
Indication. On pourra écrire $Z_{2n} - Z_n = aZ_n + bZ'_n$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ choisis de sorte Z_n et Z'_n soient indépendantes et de même loi.

(3) En déduire que si $\sigma^2 > 0$ alors la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 16. (**Sommes aléatoires**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, centrées, de variance finie $\sigma^2 > 0$. On pose $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m$. Soit $(N_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}_*$, toutes indépendantes de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose finalement

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k}.$$

On suppose que $N_k \to \infty$ p.s. lorsque $k \to \infty$. Montrer que Z_k converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1), \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{|k|^2 \cdot \ln|k|} \quad \text{pour } |k| \geq 1,$$

avec $c = \frac{1}{2}(\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2 \ln k})$. Montrer que $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que X n'est pas intégrable.

Exercice 18. Soit $\lambda > 1$ fixé et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires telle que, pour tout $t \geq 0$, X_t suit une loi géométrique de paramètre e^{-t}, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_t = k) = e^{-t}(1 - e^{-t})^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\lambda U_n - \ln(n)$ converge presque sûrement vers $-\ln(\mathcal{E})$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathcal{E}$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les deux familles $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $X_{U_n}/n^{1/\lambda}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle, dont le paramètre est aléatoire et vaut $\mathcal{E}^{1/\lambda}$.