X2015 – MAP 311

PC 2 – Lundi 2 mai 2016 – Variables aléatoires réelles

Corrigé des questions non abordées en PC

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Variables aléatoires réelles

Exercice 6. Soit Z une variable aléatoire réelle de Cauchy (de densité $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$). Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|Z|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Corrigé :

D'après le théorème de transfert, $|Z|^\alpha$ est intégrable si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\alpha}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx < \infty.$$

Notons $f(x) = x^\alpha/(1+x^2)$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en $+\infty$. Comme $f(x) \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ quand $x \to \infty$, f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Étude en 0. Comme $f(x) \sim x^\alpha$ quand $x \to 0$, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.

Conclusion : $|Z|^\alpha$ est intégrable si et seulement si $|\alpha| < 1$. □

2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Corrigé :

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{Y = k\} : k \geq 1)$:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > Y, Y = k).$$

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

Or on a l'égalité des événements $\{X > Y, Y = k\} = \{X > k, Y = k\}$. Donc, en utilisant l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > k, Y = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda k} p(1-p)^{k-1}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X > Y) = pe^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \left(e^{-\lambda}(1-p)\right)^{k-1} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)} = \frac{p}{e^{\lambda} + p - 1}$$

□

Exercice 10. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose

$$S = \frac{n+1}{n} \cdot \max(U_1, \ldots, U_n).$$

Calculer l'espérance et la variance de S.

Corrigé :

Pour effectuer ces calculs, on va montrer que S est à densité en calculant sa fonction de répartition. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'indépendance de $U_1, \ldots, U_n$,

$$\mathbb{P}(S \leq x) = \mathbb{P}\left(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq \frac{nx}{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{nx}{n+1}, \cdots, U_n \leq \frac{nx}{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{nx}{n+1}\right)^n.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(S \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{nx}{(n+1)\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n+1}{n}\theta \\ 1 & \text{si } x > \frac{n+1}{n}\theta. \end{cases}$$

La fonction de répartition de S est donc continue, dérivable sauf éventuellement en 0 et en 1, donc S est a densité. Une densité f de S est donnée par la dérivée de sa fonction de répartition aux points où elle est dérivable, donc

$$f(x) = \left(\frac{n}{(n+1)\theta}\right)^n \cdot nx^{n-1} \mathbb{1}_{0 \leq x \leq \frac{n+1}{n}\theta}$$

est une densité de f.

On calcule ensuite, en utilisant le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[S] = \left(\frac{n}{(n+1)\theta}\right)^n \cdot n \cdot \int_0^{\frac{n+1}{n}\theta} x \cdot x^{n-1} dx = \left(\frac{n}{(n+1)\theta}\right)^n \cdot n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\theta\right)^{n+1} = \theta.$$

De même,

$$\mathbb{E}[S^2] = \left(\frac{n}{(n+1)\theta}\right)^n \cdot n \cdot \int_0^{\frac{n+1}{n}\theta} x^2 \cdot x^{n-1} dx = \left(\frac{n}{(n+1)\theta}\right)^n \cdot n \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\theta\right)^{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2.$$

Donc la variance de S vaut

$$\mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 = \theta^2\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

□

3 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 12. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\alpha, \beta > 0$ on pose $X = \beta Z^{1/\alpha}$.

(1) Quelle est la fonction de répartition de X ?

(2) La loi de X admet-elle une densité ?

La loi de X est appelée loi de Weibull de paramètre (α, β). Elle est utilisée (entre autres) pour modéliser des temps de panne.

Corrigé :

(1) Si $x < 0$, on a $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$. Si $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) = 1 - e^{-x^\alpha/\beta^\alpha}.$$

(2) La fonction de répartition X est continue, dérivable sauf éventuellement en 0, donc X est a densité, et une densité est donnée par une dérivée de la fonction de répartition aux points où elle est dérivable. Une densité de X est donc

$$\frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha/\beta^\alpha}.$$

□

Exercice 13. (Générer une loi uniforme avec des variables de Bernoulli) Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/2. On pose $Z = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.

(1) On note

$$\mathcal{D}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{i_k}{2^k} : n\geq 1, i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}\right\}$$

l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$, qui sont denses dans $[0,1]$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ dont la fonction de répartition F_Y vérifie $F_Y(t)=t$ pour tout $t\in\mathcal{D}$. Montrer que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(2) Montrer que pour tous $i_1,\ldots,i_p\in\{0,1\}$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_1=i_1,\ldots,X_p=i_p\right)=\mathbb{P}\left(Z\in\left[\sum_{j=1}^{p}i_j2^{-j},\sum_{j=1}^{p}i_j2^{-j}+2^{-p}\right]\right).$$

En déduit que que Z est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(3) Réciproquement, montrer que si Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, alors les bits de son écriture en base 2 forment une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

(4) Que se passe-t-il en base $b\geq 3$ avec la loi uniforme sur $\{0,\ldots,b-1\}$?

Corrigé :

(1) Soit $x\in[0,1[$ et montrons que $F_Y(x)=x$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans $[0,1]$, il existe une suite décroissante $(d_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ tels que $d_n\to x$. Comme F_Y est continue à droite en x, on a $d_n=F_Y(d_n)\longrightarrow F_Y(x)$. Donc $F_Y(x)=x$. On montre de même que $F_Y(1-)=1$ (où $F_Y(1-)$ est la la limite à gauche de F_Y en 1). Comme $1\geq F_Y(1)\geq F_Y(1-)=1$, on en déduit que $F_Y(1)=1$.

(2) La première partie de la question découle du fait qu'avec probabilité 1 une infinité de 0 et de 1 apparaissent dans la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ (par exemple d'après le deuxième lemme de Borel–Cantelli) et que

$$\sum_{k\geq n+1}\frac{t_k}{2^k}<\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}$$

pour toute suite $(t_k)_{k\geq n+1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ qui prend au moins une fois la valeur 0.

Notons

$$\mathcal{D}_n=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{2^k} : t_1,\ldots,t_{n-1}\in\{0,1\} \text{ et } t_n=1\right\}.$$

Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $t \in \mathcal{D}_n$ on a $\mathbb{P}(Z \leq t) = t$. Pour $n = 1$, on a bien $\mathbb{P}(Z \leq 1/2) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. Supposons que le résultat est acquis pour les éléments de $\mathcal{D}_k$, $1 \leq k \leq n$ et montrons le pour les éléments de $\mathcal{D}_{n+1}$. Tout d'abord, $\mathbb{P}(Z \leq 1/2^{n+1}) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{n+1} = 0) = 1/2^{n+1}$. Ensuite, choisissons $t = \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \in \mathcal{D}_{n+1}$ avec $1 \leq m < n$ et $t_m = 1$. Alors, d'après la première partie de la question,

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(Z \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k}\right) + \mathbb{P}(X_1 = t_1, X_2 = t_2, \ldots, X_m = t_m, X_{m+1} = 0, \ldots, X_n = 0)$$

Donc, par hypothèse de récurrence,

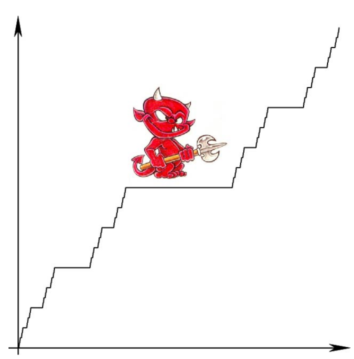
$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(Z \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = t.$$

Ceci clôt la récurrence et conclut grâce à la question (1).

(3) Ceci se démontre en utilisant la même idée que la question (2), voir l'exemple 4.9.9 du poly pour plus de détails.

(4) Les mêmes résultats sont satisfaits avec $Z = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} X_k$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Remarque. Il peut se produire un phénomène surprenant lorsque $b \geq 3$ et les X_n ne sont pas de loi uniforme sur $\{0, \ldots, b-1\}$. Un exemple célèbre est fourni par l'escalier du diable, qui correspond à la fonction de répartition F_Y quand $b = 3$ et les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 0$. Dans ce cas, F_Y est une fonction continue, dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) de dérivée nulle, qui est connue sous le nom d'escalier du diable (voir la Figure ci-dessous et http://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor). Dans ce cas, Y n'est pas à densité (sa loi est même singulière par rapport à la mesure de Lebesgue).



□

4 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 14. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements (on rappelle que cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Corrigé :

Soit $B \subset \mathbb{N}^*$. Alors, par définition,

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{i\in B} A_i \in \mathcal{A},$$

comme union finie ou dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$. □

Exercice 15. (Exemple d'ensemble non mesurable) Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0, 2\pi]$). On voit $[0, 2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).

Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.

(2) En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.

Corrigé :

(1) Si $z \in \mathbb{S}$, il existe $i \in I$ tel que $z \in \mathcal{O}_i$. Ainsi z est dans l'orbite de z_i, et il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z \in R_\alpha^{(k)}(z_i)$. Donc $z \in R_\alpha^{(k)}(E)$, et donc $\mathbb{S} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$. Comme l'inclusion inverse est claire, on a égalité des deux ensembles.

Pour montrer que l'union est disjointe, raisonnons par l'absurde en supposant que $x \in R_\alpha^{(m)}(E)$ et $x \in R_\alpha^{(n)}(E)$ avec $m \neq n$. Il existe alors $i, j \in I$ tels que $x = R_\alpha^{(m)}(z_i) = R_\alpha^{(n)}(z_j)$. Donc z_i et z_j sont dans la même orbite, et donc $i = j$. Mais alors $z_i = R_\alpha^{(m-n)}(z_i)$, ce qui contredit le fait que les orbites sont infinies.

(2) Si E était mesurable, on aurait

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{S}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}\Big(R_\alpha^{(n)}(E)\Big).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(R_\alpha^{(n)}(E)) = \mathbb{P}(E)$ car la loi uniforme sur le cercle est invariante par rotations. Ceci nous amène à une contradiction.

$\square$