Igor Kortchenski

Cours 5 : Convergence en loi

Plan : 1) Théorème de porte-manteau
2) Application

1) Théorème de porte-manteau

Exemple : Soit X_n v.a de densité

$\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \cdot n \, dx$ $\left(X_n : \mathcal{U}nif([0,\frac{1}{n}])\right)$

Alors pour $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = n \int_0^{1/n} f(x)\,dx$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} f(0)$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{loi} X$ constante $= 0$

MAIS

$$0 = \mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\mathbb{P}(X = 0)}$$

Ainsi, $X_n \xrightarrow{(d)} X \not\Rightarrow \forall B \quad \mathbb{P}(X_n \in B) \to \mathbb{P}(X \in B)$

Le résultat suivant précise pour quels B c'est le cas.

Théorème (Porte-manteau/Alexandrov)

μ_n, μ mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.
On a $\Leftrightarrow$ entre :

(1) $\mu_n \to \mu$ étroitement
$\left(\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d), \int f d\mu_n \to \int f d\mu\right)$

(2) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée,
$$\int f\, d\mu_n \longrightarrow \int f\, d\mu$$

(3) $\forall G$ ouvert, $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$

(4) $\forall F$ fermé, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

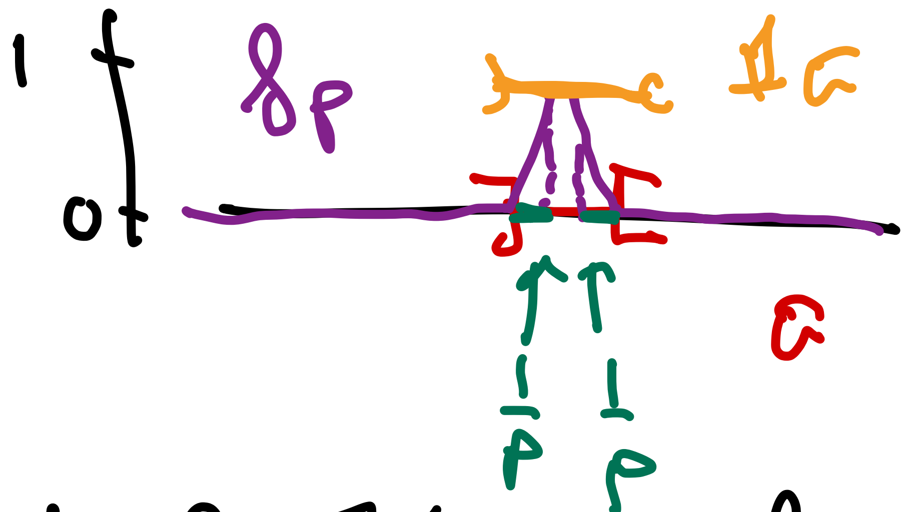
(5) $\forall B$ borélien avec $\mu(\partial B) = 0$ $= \mu(\bar{B} \setminus \mathring{B})$
$\mu_n(B) \longrightarrow \mu(B)$

(6) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable
continue en μ-presque to[ut point]
$(\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f$ est continu[e ...]
on a $\int f\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f$ [...]

<u>Preuve</u> : (1) $\Rightarrow$ (2) clair car une fonction lipschitzienne, bornée est continue bornée

(2) $\Rightarrow$ (3) <u>idée</u> : approximer $\mathbb{1}_G$ par une fonction lipschitzienne bornée

On pose $f_p(x) = \min(p\, d(x, G^c), 1)$



f_p est lipschitzienne (exercice)

$0 \leq f_p \leq \mathbb{1}_G$

et $f_p \nearrow \mathbb{1}_G$ (la suite (f_p) est $\nearrow$)

Alors $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} \int f_p \, d\mu_n$

pour tout $p \geq 1$

Par (2) $\liminf_{n\to\infty} \int f_p \, d\mu_n \to \int f_p \, d\mu$

(car f_p lipschitzienne bornée)

Donc

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\bar{U}) \geq \sup_{p\geq 1} \int f_p \, d\mu$$

or $f_p \nearrow \mathbb{1}_{\bar{U}}$. Donc par convergence monotone

$$\sup_{p\geq 1} \int f_p \, d\mu = \int \mathbb{1}_{\bar{U}} \, d\mu$$
$$= \mu(\bar{U})$$

(3) $\Rightarrow$ (4) on l'obtient en utilisant (3) avec F^c.

(3) $\forall G$ ouvert, $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$

(4) $\forall F$ fermé, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

(5) $\forall B$ borélien avec $\mu(\partial B)=0$ $= \mu(\overline{B} \setminus \mathring{B})$

$\mu_n(B) \longrightarrow \mu(B)$

On montre (3) + (4) $\Longrightarrow$ (5).

Soit B borélien avec $\mu(\partial B)=0$

Alors

$$\begin{array}{ccccc} \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) & \leq & \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}) & \overset{\text{par (4)}}{\leq} & \mu(\overline{B}) \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$=$} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) & \geq & \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{B}) & \geq & \mu(\mathring{B}) \end{array}$$

Or $\mu(\mathring{B}) = \mu(\overline{B})$

Conclusion : tous les $\geq$, $\leq$ sont des $=$ et donc

$$\mu_n(B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(B)$$

(5) $\forall B$ borélien avec $\mu(\partial B) = 0$ $= \mu(\overline{B} \setminus \mathring{B})$

$\mu_n(B) \to \mu(B)$

(6) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée continue en μ-presque tout point

$(\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f \text{ est continue en } x\}) = 1)$

on a $\int f \, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$

$D = \{x \in \mathbb{R}^d : f \text{ non continue en } x\}$

On montre (5) $\Rightarrow$ (6), qui est la partie délicate. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée continue en μ presque tout point: $\mu(D) = 0$

Quitte à écrire $f = f^+ - f^-$

avec $f^+ = \max(f, 0) \geqslant 0$

et $f^- = \max(-f, 0) \geqslant 0$

On peut supposer $f \geqslant 0$.

Soit $K > 0$ tel que $0 \leq f \leq K$.

Idée: écrire $\int f \, d\mu_n$ en utilisant μ_n(quelque chose)

Par Fubini,

$$\int f(x)\,\mu_n(dx) = \int \left(\int_0^K \mathbb{1}_{t \leq f(x)}\, dt \right) \mu_n(dx)$$

$$= \int_0^K \left(\int \mathbb{1}_{t \leq f(x)}\, \mu_n(dx) \right) dt$$

$$= \int_0^K \mu_n(\{x : t \leq f(x)\})$$

Soit $A_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq t\}$.

Question : A-t-on $\mu(\partial A_t) = 0$?

Non, mais on va montrer que c'est le cas pour presque tout t (pour la mesure de Lebesgue)

Pour le voir, on remarque que $\partial A_t \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}$

$\cup\ D$

En effet, si $x \notin D$ et si $x \in \overline{A_t}$ par continuité $f(x) \geq t$ et si $f(x) > t$ alors $f(x') > t$ pour x' dans un voisinage de x, et alors $x \in \mathring{A}_t$.

Ainsi, si $x \in \partial A_t$ et $x \notin D$, forcément $f(x) = t$.

D'autre part,

$E = \{t \geq 0 : \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.

En effet, il y a au plus k valeurs de t pour lesquelles

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}) \geq \frac{1}{k}$$

<u>Bilan</u> $\int f(x)\,\mu_n(dx) = \int_0^L \mu_n(A_t)\,dt$

avec $A_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq t\}$

et $\partial A_t \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\} \cup D$

Ainsi, si $t \notin E$,

$$\mu(\partial A_t) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}) + \underbrace{\mu(D)}_{=0}$$

$$= 0 \quad \text{car } t \notin E.$$

Or E au plus dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Donc :

- pour presque $t \in [0, L]$ $\mu(\partial A_t) = 0$.

Mais alors par (5) :

- pour presque tout $t \in [0, L]$, $\mu_n(A_t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A_t)$
- $\mu_n(A_t) \leqslant 1$, intégrable sur $[0, L]$

Par convergence dominée

$$\int_0^L \mu_n(A_t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^L \mu(A_t)\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} \int_0^L \mu_n(A_t)\,dt & & \int_0^L \mu(A_t)\,dt \\ \| & & \| \text{ Fubini} \\ \int f(x)\,\mu_n(dx) & & \int f(x)\,\mu(dx) \end{array}$$

Enfin on montre

(6) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée continue en μ-presque tout point ($\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f \text{ est continue en } x\}) = 1$) on a $\int f \, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$

$\Rightarrow \mu_n \to \mu$ étroitement.

Clair car une fonction continue bornée est mesurable bornée continue en μ-presque tout point

Ouf !

Pour nous le plus important est sa formulation probabiliste

Remarques :

- Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable on peut montrer que $\{x \in \mathbb{R}^d : f \text{ continue } x\}$ est bien mesurable dans $\mathbb{R}^d$
- "f est p-s continue en X" veut dire

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f \text{ est continue en } X(\omega)\}) = 1.$$

Théorème On a $\Leftrightarrow$ entre :

(1) $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

(2) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

(3) $\forall G$ ouvert,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$$

(4) $\forall F$ fermé

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$$

(5) $\forall B$ borélien tq $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$,

$$\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in B)$$

(6) $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée p.s continue en X, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X_n)]$

2) Applications du théorème de porte-manteau

Rappelons la notation $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour X v.a. réelle : F_X est la fonction de répartition

Rappelons que :

- F_X caractérise la loi de X
- F_X a au plus un nombre dénombrable de discontinuités (F_X est croissante). En particulier ses points de continuité sont denses dans $\mathbb{R}$

Théorème Soit X_n, X v.a. réelles. On a $X_n \xrightarrow{loi} X$ ssi

$$F_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$$

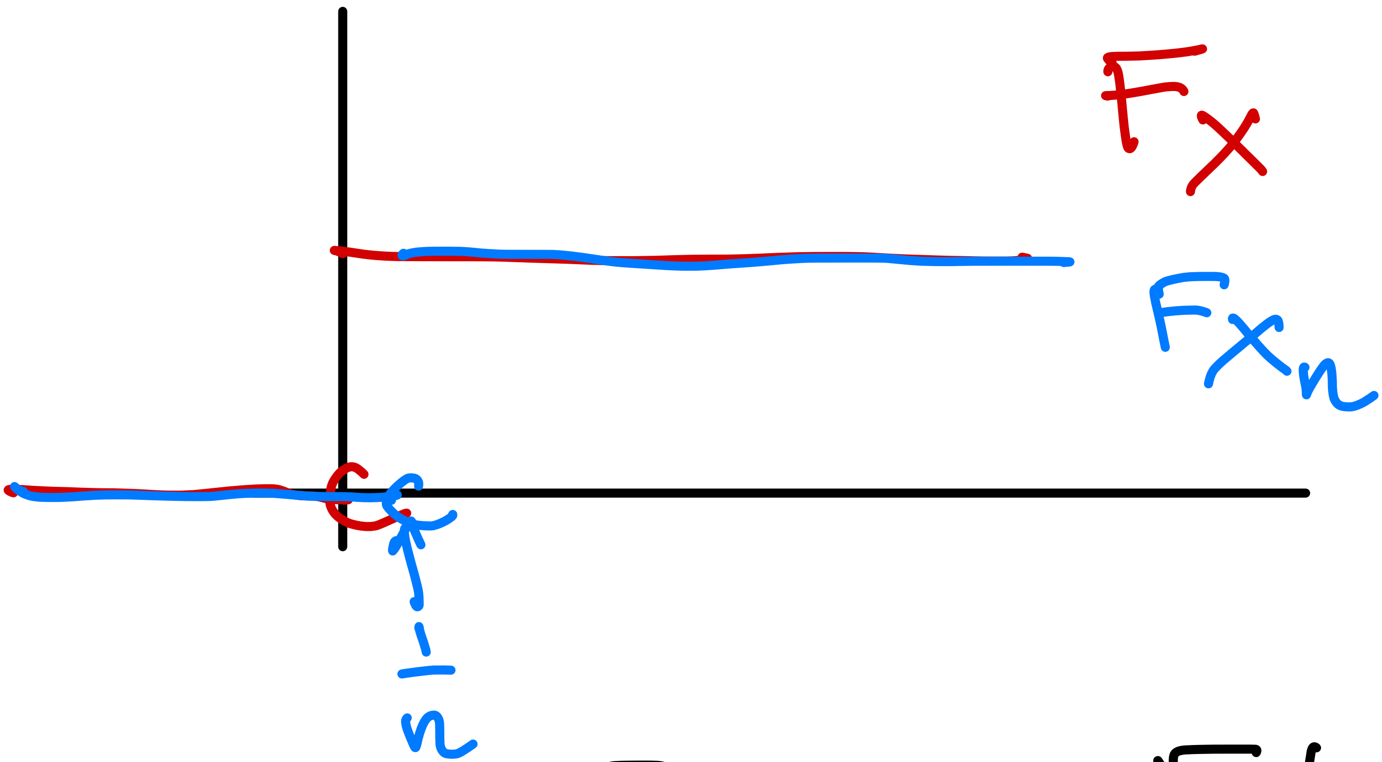
⚠ ⚠ ⚠

$\forall t \in \mathbb{R}$ point de continuité de F_X ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

" x point de continuité de f " = " f est continue en x "

Exemple $X_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X = 0$

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(X_n)] = f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0) = \mathbb{E}[f(X)]$$



On a bien $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout $t \neq 0$

(et ce n'est pas le cas pour $t=0$)

Théorème Soit X_n, X v.a. réelles. On a $X_n \xrightarrow{loi} X$ ssi

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ point de continuité de F_X ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Preuve du théorème

$\boxed{\Rightarrow}$ Si F_X est continue en t, on a $\mathbb{P}(X=t)=0$

en effet $\mathbb{P}(X=t) = F_X(t) - F_X(t-)$

En prenant $B =]-\infty, t]$

on a $\partial B = \{t\}$ et

$\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$

Donc par porte-manteau

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \leq t)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \leq t)$$

$\forall t$ tel que $\mathbb{P}(X=t)=0$.

On montre que $X_n \xrightarrow{loi} X$.

On montre que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq t)}$ $(\ast)$

et $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < t) \geq \mathbb{P}(X < t)$ $(\ast\ast)$

En effet, si on a $(\ast)$ et $(\ast\ast)$ on a alors $\forall \sigma$ de la forme $]a, b[$,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in \sigma) \geq \mathbb{P}(X \in \sigma)$$

Pour montrer que c'est vrai $\forall$ ouvert σ, on utilise juste le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ union dénombrable d'intervalles ouverts.

Montrons (∗) ((∗∗) est obtenu de la même manière).

Soit $t \in \mathbb{R}$.

<u>problème</u> : F_X n'est pas forcément continue en t (si c'est le cas (∗) est une = par hypothèse)

<u>idée</u> approcher t par un point de continuité

Soit $x > t$ un point de continuité de F_X. Alors

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x)$$

par hypothèse

ceci est vrai $\forall x > t$ point de continuité.

On fait tendre $x \searrow t$

(possible car les points de continuité sont denses)

$$\mathbb{P}(X \leq x) \xrightarrow[x \searrow t]{} \mathbb{P}(X \leq t)$$

d'où $(*)$

Application Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. tq $X_n \sim$ Géometrique$\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

Alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{E}xp(\lambda)$

<u>Preuve</u> Soit $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$. Comme sa fonction de répartition est continue, il suffit de montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \geq t)$$

- Pour $t \leq 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq t\right) = 1$

$$\mathbb{P}(X \geq t) = 1$$

- Pour $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq t\right) = \mathbb{P}(X_n \geq \lceil nt \rceil) \quad (X_n \in \mathbb{N})$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lceil nt \rceil - 1}$$

(rappel : $\mathbb{P}(\text{geom}(p) \geq k) = (1-p)^{k-1}$)

Ainsi

$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq t\right) =$

$\exp\left((\lceil nt \rceil - 1)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$

$= \exp\left((nt + O(1))\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$= \exp(-\lambda t + o(1))$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} \exp(-\lambda t) = \mathbb{P}(X \geq t)$

Proposition Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. dans $\mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}^d$ une constante. On a

$X_n \xrightarrow{(d)} c$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ On sait que la cv en proba implique la cv en loi

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B(c, \varepsilon)$ la boule ouverte de rayon ε centrée en c. Alors

$$B(c,\varepsilon)^c = \{ x \in \mathbb{R}^d : |x - c| \geq \varepsilon \}$$

est fermé

Par Porte-manteau,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in B(c,\varepsilon)^c)$$

$$\leq \mathbb{P}(c \in B(c,\varepsilon)^c)$$

$$= 0$$

$\sim$

Proposition (principe des lois accompagnantes)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, X des v.a. dans $\mathbb{R}^d$. On suppose

- $X_n \xrightarrow{(d)} X$
- $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Alors $Y_n \xrightarrow{(d)} X$

Preuve : On montre $\forall F$ fermé
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \mathbb{P}(X\in F)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Notons
$$F^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,F) \leq \varepsilon\}$$
le ε-voisinage fermé (exercice) de F.

Alors

$\mathbb{P}(Y_n \in F)$

$= \mathbb{P}(Y_n \in F, |X_n - Y_n| \leq \varepsilon)$

$+ \mathbb{P}(Y_n \in F, |X_n - Y_n| > \varepsilon)$

$\leq \mathbb{P}(X_n \in F^\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon)$

or $\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \in F^\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F^\varepsilon)$

car F^ε fermé et $X_n \xrightarrow{(d)} X$

et $\mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

car $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

<u>Conclusion</u> :

$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F^\varepsilon)$

On conclut en remarquant

que $\mathbb{P}(X \in F^{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{P}(X \in F)$ car F fermé.

Théorème / Lemme de Slutsky

Soit (X_n), (Y_n), X des v.a. dans $\mathbb{R}^d$. Soit $c \in \mathbb{R}^d$ une constante. On suppose :

- $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$
- $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (ou en loi)

Alors $(X_n, Y_n) \longrightarrow (X, c)$

⚠ ⚠ ⚠ En général

$X_n \xrightarrow{(d)} X$, $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$

$\not\Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{(d)} (X, Y)$

En effet prenons $N = \mathcal{N}(0,1)$

$X_n = Y_n = N$

$X = N$, $Y = -N$.

Alors

$X_n \xrightarrow{(d)} X$, $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$

mais

$$(X_n, Y_n) = (N, N) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} (X, Y) = (N, -N).$$

Le théorème dit que c'est le cas lorsque une des variables aléatoires limites est une constante.

Théorème / Lemme de Slutsky

Soit (X_n), (Y_n), X des v.a. dans $\mathbb{R}^d$. Soit $c \in \mathbb{R}^d$ une constante. On suppose :

- $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$
- $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (ou en loi)

Alors $(X_n, Y_n) \longrightarrow (X, c)$

Preuve On va utiliser le principe des lois accompagnantes

- $(X_n, c) \xrightarrow{\text{loi}} (X, c)$

on applique le principe de composition avec la fonction continue

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto (x, c) \end{aligned}$$

- $\|(X_n, c) - (X_n, Y_n)\|_1 = |Y_n - c|$

$\xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$

Exemple Soit X_n, X, Y_n des v.a. réelles, $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On suppose

- $X_n \xrightarrow{(d)} X$
- $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ (ou en loi)

Alors
$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{(d)} \frac{X}{a}$$

En effet, par Slutsky
$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{(d)} (X, a)$$

On a envie de composer cette convergence en loi par $f(x,y) = \frac{x}{y}$

Problème : $y=0$????

Idée appliquer le (6) de Porte-manteau. Soit g continue bornée

Soit $f(x,y) = \begin{cases} g\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

On remarque f est p-s. continue en (X,a)

Donc par porte-manteau,

$$\mathbb{E}[f(X_n,Y_n)] \to \mathbb{E}[f(X,a)]$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{X}{a}\right)\right]$$

Donc $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{loi} \frac{X}{a}$.

<u>Intérêt du lemme de Slutsky</u> Dans une convergence en loi avec beaucoup de variables aléatoires, remplacer une variable aléatoire par une constante si elle

elle converge en probabilité vers cette constante, et ce sans changer la limite

(dans l'exemple on a remplacé Y_n par a)