Igor Kortchenski

Cours 4 : Convergences de variables aléatoires

Plan : 1) Loi forte des grands nombres
2) Différents modes de convergence
3) La convergence en loi

1) Loi forte des grands nombres

Le résultat suivant est l'un des deux théorèmes fondamentaux en probabilité

Théorème (Loi forte des grands nombres LGN ; SLN en anglais)

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. réelles iid avec $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Alors p.s. $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1]$

On utilisera les deux lemmes suivants:

Lemme 1 (Cesaro) Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ des réels tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Alors $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Lemme 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. réelles. On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, p.s. pour n assez grand

$$|X_n| \leq \varepsilon.$$

Alors p.s. $X_n \to 0$

Preuve : On voudrait montrer que p.s. $\forall \varepsilon > 0$ pour n assez grand $|X_n| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire intervertir "$\forall \varepsilon > 0$" et p.s.

⚠ ⚠ ⚠ en général on ne peut pas le faire

en effet, si U est une va

uniforme sur $[0,1]$, alors

« $\forall x \in [0,1]$, p.s $U \neq x$ » VRAI

« p.s. $\forall x \in [0,1]$ $U \neq x$ » FAUX

(prendre $x = U(\omega)$)

On a déjà vu qu'on peut intervertir p.s et « $\forall$ ensemble dénombrable »

<u>Idée</u> : se ramener à un $\forall \in$ ensemble dénombrable

Par hypothèse, $\forall k \geq 1$, p.s. pour n assez grand $|X_n| \leq \frac{1}{2^k}$

Donc

p.s. $\forall k \geq 1$, pour n assez grand $|X_n| \leq \frac{1}{2^k}$

Donc p.s. $X_n \to 0$

∞

LFN: $(X_i)_{i \geq 1}$ iid, $\in L^1$ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}[X_1]$

avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$

<u>Preuve (d'après Etemadi)</u>

Soit $m = \mathbb{E}[X_1]$. En écrivant

$X_i = \max(X_i, 0) - \max(-X_i, 0)$

on peut supposer $X_i \geq 0$

sous perte de généralité

<u>Idée</u> se restreindre à une sous-suite géométrique.

Soit $\alpha > 1$ et $k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$

Il suffit de montrer que

$$\text{p.s} \quad \frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{p.s} m \quad (*)$$

En effet, si $(*)$ a lieu, alors pour $k \geq 1$ soit n tel que

$$\lfloor \alpha^{n-1} \rfloor = k_{n-1} \leq k < k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$$

Alors, par monotonie ($X_i \geq 0$)

$$\frac{S_{k_{n-1}}}{k_n} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{k_n}}{k_{n-1}}$$

Donc

$$\frac{k_{n-1}}{k_n} \cdot \frac{S_{k_{n-1}}}{k_{n-1}} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{k_n}}{k_n} \cdot \frac{k_n}{k_{n-1}}$$

$\frac{k_{n-1}}{k_n} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{\alpha}$, $\quad \frac{S_{k_{n-1}}}{k_{n-1}} \xrightarrow[k \to \infty]{p.s} m$, $\quad \frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[k \to \infty]{p.s} m$, $\quad \frac{k_n}{k_{n-1}} \xrightarrow{k \to \infty} \alpha$

par $(*)$

Conclusion : $\forall \alpha > 1$, p.s.

$$\frac{m}{\alpha} \leq \liminf_{k \to \infty} \frac{S_k}{k} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{S_k}{k} \leq \alpha m$$

En faisant $\alpha \to 1$, on conclut

$$\frac{S_k}{k} \xrightarrow{p.s} m.$$

$\alpha > 1$, $k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$. But $\frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{p.s} m$ (*)

Lemme $\exists c > 0$ telle que $\forall x > 0$

$$\sum_{n : k_n \geq x} \frac{1}{k_n^2} \leq \frac{c}{x^2}$$

Preuve : il suffit de le montrer pour x assez grand

Soit n_0 tel que $\lfloor \alpha^{n_0 - 1} \rfloor < x \leq \lfloor \alpha^{n_0} \rfloor$

Pour n assez grand, $k_n \geq \alpha^{n-1}$

et pour x assez grand

$x \geq \alpha^{n_0 - 2}$. Ainsi

$$\sum_{n : k_n \geq x} \frac{1}{k_n^2} \leq \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(\alpha^{n-1})^2}$$

$$= \alpha^2 \cdot \alpha^{2n_0} \leq \frac{\alpha^6}{x^2}$$

$\sim$

$\alpha > 1$, $k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$. But $\frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{p.s} m$ $(*)$

Rappel :

Lemme $\exists c > 0$ telle que $\forall x > 0$

$$\sum_{n : k_n \geq x} \frac{1}{k_n^2} \leq \frac{c}{x^2}$$

Preuve de $(*)$ Idée : argument de troncature.

On pose $Y_i = X_i \mathbb{1}_{X_i < i}$

(les (Y_i) sont $\perp\!\!\!\perp$ mais pas de même loi)

On pose $S_n^* = Y_1 + \dots + Y_n$

Étape 1 : Si $\frac{S^*_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{p.s} m$

alors $(*)$

Pour cela on montre que

p.s pour n assez grand

$X_n = Y_n$ (i.e $X_n < n$)

cela implique que p.s

$$\left| \frac{S_{k_n}}{k_n} - \frac{S^*_{k_n}}{k_n} \right| \longrightarrow 0.$$

On a $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq n)$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{i \geq n} \mathbb{P}(i \leq X < i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \leq i} \mathbb{P}(i \leq X < i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \, \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{i \leq X < i+1} \right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} i \, \mathbb{1}_{i \leq X < i+1} \right]$$

$$\leq \mathbb{E}[X] < \infty.$$

Donc par BC p.s.
$X_n \neq Y_n$ un nombre fini
de fois.
Donc p.s. $X_n = Y_n$ pour
n assez grand.

Rappel : $\alpha>1$, $k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$

$Y_i = X_i \mathbb{1}_{X_i < i}$, $S_n^* = Y_1 + \dots + Y_n$

Étape 2 On montre que

$$\frac{S^*_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{p.s} m.$$

Lemme $\exists c>0$ telle que $\forall x>0$

$$\sum_{n : k_n \geq x} \frac{1}{k_n^2} \leq \frac{c}{x^2}$$

Étape (a) On montre que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S^*_{k_n} - \mathbb{E}[S^*_{k_n}]}{k_n} \right| \geq \varepsilon \right) < \infty$$

Rappels : • (Markov) si $Z \geq 0$, $\forall x>0$, $\mathbb{P}(Z\geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[Z]}{x}$

• (Bienaymé-Tchebychev) si $Z \in L^2$, $\forall x>0$,

$$\mathbb{P}(|Z-\mathbb{E}[Z]| \geq x) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{x^2}$$

Preuve :

- $$\mathbb{E}[Z] \geq \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{Z \geq x}] \geq \mathbb{E}[x \cdot \mathbb{1}_{Z \geq x}] = x\,\mathbb{P}(Z \geq x)$$

- $$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq x) = \mathbb{P}((Z - \mathbb{E}[Z])^2 \geq x^2) \leq \frac{1}{x^2}\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]$$ (Markov)

$$= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{x^2}$$

But : $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S^*_{k_n} - \mathbb{E}[S^*_{k_n}]}{k_n}\right| \geq \varepsilon\right) < \infty.$ $(\ast\ast\ast)$

Soit X v.a. de même loi que X_1

Alors

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S^*_{k_n} - \mathbb{E}[S^*_{k_n}]}{k_n}\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\varepsilon^2 k_n^2} \mathrm{Var}(S^*_{k_n}) \quad \text{(Bienaymé Tchebyshev)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\varepsilon^2 k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{Var}(Y_i)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\varepsilon^2 k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X<i}]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X<i}] \sum_{k_n\geq i} \frac{1}{k_n^2}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X<i}]$$

$\sum_{k_n\geq i} \frac{1}{k_n^2} \leq \frac{C}{i^2}$ par lemme 2

Étape 1) On montre

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X<i}] < \infty$$

ce qui impliquera (*pf)

Pour cela, on écrit

$$\left(\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^\infty 2z\, \mathbb{P}(|Z| \geq z)\, dz \right)$$

$$\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X<i}]$$

$$= \int_0^\infty 2y\, \mathbb{P}(|X| \mathbb{1}_{X<i} > y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty 2y\, \mathbb{P}(|X| > y)\, \mathbb{1}_{y<i}\, dy$$

Par Fubini

$$S = \int_0^\infty 2y\, \mathbb{P}(|X| > y) \sum_{i>y} \frac{1}{i^2}$$

étape Ⓒ On montre que

$$\sum_{i>y} \frac{1}{i^2} \leq \frac{2}{y} \quad \text{pour } y>0.$$

en effet • si $y \in]0,1]$, la somme vaut $\frac{\pi^2}{6} \leq 2$.

• si $y \geq 1$

$$\sum_{i>y} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=[y]+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

$$\leq \int_{[y]}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{[y]} \leq \frac{2}{y}.$$

<u>Conclusion</u> :

$$S \leq 4\int_0^\infty \mathbb{P}(|X|>y)\,dy = 4\,\mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

Conclusion :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S^{Y}_{k_n} - \mathbb{E}[S^{Y}_{k_n}]}{k_n} \right| \geq \varepsilon \right) < \infty.$$

Par BC on a donc p.s pour n assez grand

$$\left| \frac{S^{Y}_{k_n} - \mathbb{E}[S^{Y}_{k_n}]}{k_n} \right|_{k_n} < \varepsilon.$$

Or $\frac{\mathbb{E}[S^{Y}_{k_n}]}{k_n} = \frac{\sum_{i=1} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X<i}]}{k_n}$

or $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X<i}] \xrightarrow[i\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$

par convergence dominée.

Donc par Cesaro, $\frac{\mathbb{E}[S^{Y}_{k_n}]}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m.$

Ainsi, p.s pour n assez grand,

$$\left| \frac{S^*_{k_n}}{k_n} - m \right| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui conclut

Remarques :

(1) L'hypothèse d'intégrabilité est optimale, au sens où elle est nécessaire pour que $\mathbb{E}[X_1]$ soit bien défini et fini. Si $X_i \geq 0$ et $\mathbb{E}[X_i] = \infty$ on peut montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[p.s]{} \infty$$

(exercice : appliquer LGN à $\min(X_i, K)$)

(2) La convergence de la LGN a aussi lieu dans L^1 (preuve faite plus tard dans un autre cours).

2) Les différents modes de convergence de v.a.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des v.a. dans $\mathbb{R}^d$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On a déjà rencontré la convergence p.s :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$$

si $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1$

ainsi que la convergence L^p :

$$X_n \xrightarrow{L^p} X$$

$(L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}))$

si $\int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|^p \, d\omega \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

i.e.

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \to 0$$

Définition On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ici $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$)

Proposition $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi

$$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Preuve : • Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)]$$

$$\leq \mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)\, \mathbb{1}_{|X_n - X| < \varepsilon}]$$

$$+ \mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)\, \mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}]$$

$\leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$

Donc pour n assez grand

$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)] \leq 2\varepsilon$

• Réciproquement, si

$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

pour $\varepsilon \in]0,1]$ on a

$\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(\min(|X_n - X|, 1) \geqslant \varepsilon)$

$\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)]$

(Markov)

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par hypothèse.

Rappel : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$

Proposition $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi
$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ ou si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Preuve

- Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ alors

$\mathbb{E}[\min(|X_n - X|, 1)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

par convergence dominée.

En effet :

- p.s $\min(|X_n - X|, 1) \longrightarrow 0$
- $\min(|X_n - X|, 1) \leq 1$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ par la proposition

- Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$
$$= \mathbb{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] \text{ (Markov)}$$
$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Lemme des sous-sous-suites

On a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi de toute sous-suite de (X_n) on peut ré-extraire une sous-suite qui converge ps vers X

<u>Preuve</u> $\boxed{\Rightarrow}$ Soit φ une sous-suite (i.e. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante)

On trouve ψ sous-suite tq

$$X_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow{p.s} X.$$

Par la proposition on sait que $\mathbb{E}[\min(|X_{\varphi(n)} - X|, 1)]$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit ψ sous-suite telle que

$$\mathbb{E}[\min(|X_{\varphi\circ\psi(n)} - X|, 1)] \leq \frac{1}{2^n}.$$

Alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\min(|X_{\varphi\circ\psi(n)} - X|, 1)] < \infty$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \min(|X_{\varphi\circ\psi(n)}-X|,1)\right] < \infty$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1} \min(|X_{\varphi\circ\psi(n)}-X|,1) < \infty \quad p.s$$

Donc

$$p.s \quad \min(|X_{\varphi\circ\psi(n)}-X|,1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc

$$p.s \quad X_{\varphi\circ\psi(n)} \longrightarrow X$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par l'absurde

On suppose que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\not\longrightarrow} X$.

Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \not\longrightarrow 0$

Il existe alors $\eta > 0$ et φ sous-suite telle que $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \varepsilon) \geq \eta$

Par hypothèse il existe ψ tq $X_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{p.s} X$

Donc $X_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Or $\forall n \geq 1$

$\mathbb{P}(|X_{\varphi \circ \psi(n)} - X| > \varepsilon) \geq \eta$

Absurde.

Exemple important. Soit $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. $\perp\!\!\!\perp$ avec

$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$

Alors :

- $\mathbb{E}[|X_n|^p] = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $X_n \xrightarrow{L^p} 0$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

- Pour $\alpha > 1$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) < \infty$

Donc par BC, p.s $X_n = 1$ un nombre fini de fois.

Donc p.s $X_n = 0$ pour n assez grand. Donc p.s $X_n \to 0$.

• Si $\alpha \leq 1$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 0) = \infty$.

Donc par BC, p.s $X_n = 0$ une infinité de fois et $X_n = 1$ une infinité de fois. Donc p.s X_n diverge.

<u>Proposition</u> On suppose $X_n \xrightarrow{P} X$ et que (X_n) est bornée dans L^r avec $r > 1$ ($\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^r] < \infty$)

Alors $\forall p \in [1, r[$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$

<u>Preuve</u> : Soit $C>0$ tq $\forall n \geq 1$

$$\mathbb{E}[|X_n|^r] \leq C.$$

<u>Étape 1</u> On montre que $X \in L^r$

Soit φ telle que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$.

Alors par lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[|X|^r] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_{\varphi(n)}|^r]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_{\varphi(n)}|^r] \leq C$$

Donc $X \in L^r$.

<u>Étape 2</u> On fixe $p \in [1, r[$.

On écrit

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] =$$

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}]$$

$$+ \mathbb{E}[|X_n - X|^p \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}]$$

$$\le \varepsilon^p + \mathbb{E}\left[|X_n - X|^r\right]^{\frac{p}{r}} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|X_n - X| \ge \varepsilon}\right]^{1-\frac{p}{r}}$$

(Holder)

$$\le \varepsilon^p + 2^p C^{\frac{p}{r}} \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon)^{1-\frac{p}{r}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Ainsi $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En général

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$$

En effet, si

$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ $\quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ car

$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

mais $X_n \not\longrightarrow 0$ dans L^1

car $\mathbb{E}[|X_n|] = 1 \not\longrightarrow 0$.

3) La convergence en loi

Rappel : $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$

$= \{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ f \text{ continue bornée} \}$

et pour $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$$

Définition

- Une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ <u>converge étroitement</u> vers une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ si

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d), \int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu$$

- Une suite de v.a. (X_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (pas forcément définies sur le même espace de probabilité) converge en loi vers une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si

$$\mathbb{P}_{X_n} \longrightarrow \mathbb{P}_X \text{ étroitement}$$

c'est-à-dire $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Notation : $X_n \xrightarrow{(loi)} X$

$X_n \xrightarrow{(d)} X$ (anglais : convergence in distribution)

Remarques :

- Il y a un abus de langage à dire que la suite de v.a (X_n) converge en loi car la v.a. limite n'est pas définie de manière unique : seule sa loi l'est.

Pour cette raison, on dit souvent que X_n converge en loi vers μ, mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$

(exemple si $\mathbb{P}(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$

$$X_n = X \xrightarrow{(\text{loi})} X$$

et aussi $X_n = X \xrightarrow{(\text{loi})} -X$

car $X \overset{(\text{loi})}{=} -X$)

- les v.a. X_n ne sont pas forcément définies sur le même espace de probabilité, contrairement aux autres modes de convergence.

• Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $X_n \xrightarrow{(d)} Y$ alors $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\underbrace{\mathbb{E}[f(X)]}_{\int f \, d\mathbb{P}_X} = \underbrace{\mathbb{E}[f(Y)]}_{\int f \, d\mathbb{P}_Y},$$

et donc (Cours 1)

$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ et donc $X \overset{(d)}{=} Y$.

Ainsi une limite en loi est unique en loi.

Exemples :

• Si X_n est uniforme sur $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ alors

$X_n \xrightarrow{\text{loi}}$ uniforme sur $[0,1]$.

En effet si $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx \quad \left(\text{Somme de Riemann}\right)$$

- Si $X_n = N(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n^2 \longrightarrow 0$, alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}}$ v.a constante nulle (exercice)

- Si X_n est à densité, $\mathbb{P}_{X_n}(x) = p_n(x)\,dx$ et si :

$*$ $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ presque partout

$*$ $p_n \leq q$ $\forall n$ avec

avec φ intégrable, alors p est une densité et

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} \text{v.a. de densité } p$$

(conséquence du théorème de convergence dominée)

• Nous verrons plus tard que si X_n, X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$,

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff \mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Proposition (principe de composition)

On suppose $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ continue

Alors $f(X_n) \xrightarrow{(loi)} f(X)$ dans $\mathbb{R}^n$

Preuve Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors $g \circ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue bornée.

Donc $\mathbb{E}[g \circ f(X_n)] \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}[g \circ f(X)]$

Proposition Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
alors $X_n \xrightarrow{loi} X$

⚠ réciproque fausse
X tq $\mathbb{P}(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$
$X_n = X$
$X_n \xrightarrow{loi} -X$ mais $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} -X$

Preuve Par l'absurde,
si $X_n \not\xrightarrow{loi} X$, $\exists f \in C_b(\mathbb{R}^d)$
avec $\mathbb{E}[f(X_n)] \not\longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$
Donc $\exists \varepsilon > 0$ et une
sous-suite φ avec
$\forall n \geq 1 \quad \left|\mathbb{E}[f(X_{\varphi(n)})] - \mathbb{E}[f(X)]\right|$

$(\ast) \quad \geq \varepsilon$

Mais d'après le lemme des sous-sous-suites, $\exists\ \psi$ tq $X_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow{p.s} X$.

Mais alors par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[g(X_{\varphi\circ\psi(n)})] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$$

(car g est continue bornée)

Contradiction avec

$(\star)$

⚠ Si $X_n \xrightarrow{loi} X$, en général il est faux que $\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in B)$

$\forall B$ borélien

(prendre $X_n = N(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n^2 \to 0$ et $B = \{0\}$)

Nous verrons au prochain cours pour quels boréliens c'est vrai.