Igor Kortchenski

# Cours 2 : Indépendance de familles infinies et lemmes de Borel-Cantelli

Plan :

1) $\perp\!\!\!\perp$ et intégration (densité)
2) Critères d'indépendance
3) $\perp\!\!\!\perp$ familles infinies
4) Lemmes de Borel-Cantelli

## 1) Indépendance de v.a. à densité

<u>Rappel</u> $X_1, \dots, X_n$ v.a. à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$.
Elles sont $\perp\!\!\!\perp$ ssi
$\forall f_1 : E_1 \to \mathbb{R}_+, \dots, f_n : E_n \to \mathbb{R}_+$ mesurables,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)]$$

<u>Corollaire</u> $X_1, \dots, X_n$ v.a. réelles.
(1) On suppose $X_i$ a pour densité $p_i$ et $X_1, \dots, X_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$. Alors $(X_1, \dots, X_n)$ est à densité dans $\mathbb{R}^n$ et une densité est donnée par

$$p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$$

(2) Réciproquement, si $(X_1, \dots, X_n)$ a une densité $p(x_1, \dots, x_n) = q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)$ avec $q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, alors $X_1, \dots, X_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et une densité de $X_i$ est $p_i(x) = C_i\, q_i(x)$ avec

$$C_i = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} q_i}.$$

<u>idée</u> : "densité produit = $\perp\!\!\!\perp$"

<u>Preuve</u>

(1) Si $\mathbb{P}_{X_i}(dx) = p_i(x_i)\, dx_i$ alors par Fubini,

$$\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}(dx_1 \dots dx_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)\right) dx_1 \dots dx_n$$

Or par $\perp\!\!\!\perp$, $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

Donc

$$\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}(dx_1 \dots dx_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)\right) dx_1 \dots dx_n$$

(2) <u>Etape 1</u> Par Fubini,

$$\prod_{i=1}^{n} \left( \int_{\mathbb{R}} q_i(x)\,dx \right) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \dots dx_n$$

$$= 1.$$

Ainsi, en posant $K_i = \int_{\mathbb{R}} q_i(x)\,dx$

on a $K_i \in ]0,+\infty[$.

<u>Etape 2</u> : la densité de $X_i$ est donnée par

$$p_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n$$

$$\Big[\, \mathbb{P}(X_i \in A_i) = \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A_i \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}\big) \Big]$$

Donc

$$p_i(x_i) = \Big(\prod_{j \neq i} K_j\Big)\, q_i(x_i)$$

$$= \frac{1}{K_i}\, q_i(x_i) \quad \text{car } K_1 \cdots K_n = 1$$

Ainsi $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

et

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$$

et donc $X_1, \dots, X_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

$\sim$

**Exemple** Soit $U$ v.a. $\mathcal{E}xp(1/2)$ et $V$ uniforme sur $[0,1]$ avec $U \perp\!\!\!\perp V$. On pose

$$X = \sqrt{U} \cos(2\pi V)$$

$$Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$$

Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$

**Preuve** On applique la méthode de la fonction muette.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable

**But** : $\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$

= loi de $(X,Y)$.

$\mathbb{E}[f(X,Y)]$

$= \mathbb{E}[f(\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V))]$

On applique le théorème de transfert avec $(U,V)$ de loi : $\mathbb{1}_{[0,1]}\, dv \;\; \frac{1}{2} e^{-u/2}\, du \; \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^1 g\left(\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v)\right) \frac{1}{2} e^{-u/2}\, du\, dv$$

$\sqrt{u} = r$

$\theta = 2\pi v$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r e^{-r^2/2}\, dr\, d\theta$$

changement de variable polaire

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ $\quad$ $(dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy}{2\pi}.$$

loi de $(X,Y)$

$= \varphi_1(x) \times \varphi_2(y)$ (forme produit)

Donc $X \perp\!\!\!\perp Y$.

(en plus, ceci montre que $X, Y$ ont même loi, densité

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

loi classique $\mathcal{N}(0,1)$

Rappel $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Avantage de la méthode de la fonction muette :
les changements de variable sont naturels.

## 2) Critères d'indépendance

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

**Proposition** Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}$ des tribus. Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$ un $\pi$-système (stable par intersections finies) contenant $\Omega$ tel que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i$.
On suppose $\forall C_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, \forall C_n \in \mathcal{C}_n$

$$\mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_n) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(C_1) \dots \mathbb{P}(C_n)$$

Alors $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$

Intérêt : vérifier "l'II" sur des ensembles connus (de $\mathcal{B}_i$)

Preuve : on utilise les classes monotones, l'idée est d'adapter un peu la preuve.

Fixons $C_2 \in \mathcal{B}_2, \dots, C_n \in \mathcal{B}_n$ et on pose

$$\mathcal{M}_1 = \{ B_1 \in \mathcal{B}_1 : \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(C_2) \dots \mathbb{P}(C_n) \}$$

On montre que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}_1$ en montrant

① $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{M}_1$ (par $C(*)$)

② $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone.

Par le lemme des classes monotones,

comme $\mathcal{B}_1$ est un $\pi$-système, on déduit que $\mathcal{M}_1$ contient $\sigma(\mathcal{B}_1)$ $= \mathcal{B}_1$.

Montrons ②: Pour montrer que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone on montre:

ⓐ $\Omega \in \mathcal{M}_1$ (on prend $\Omega \in \mathcal{B}_1$ dans $(\ast)$)

ⓑ Si $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_1$ et $B_1 \subset B_2$ on montre que $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{M}_1$

Pour cela, on écrit

$$\mathbb{P}((B_2 \setminus B_1) \cap C_2 \cap \dots \cap C_n)$$

$$= \mathbb{P}(B_2 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n)$$

$$- \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n)$$

$$= \mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(C_2) \cdots \mathbb{P}(C_n) \quad \text{car}$$

$$- \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(C_2) \cdots \mathbb{P}(C_n) \quad B_1, B_2 \in \mathcal{M}_1$$

$$\mathcal{M}_1 = \{ B_1 \in \mathcal{B}_1 : \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}(C_n) \}$$

$$= \mathbb{P}(B_2 \setminus B_1)\,\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}(C_n)$$

Donc $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{M}_1$.

ⓒ Si $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}_1$

avec $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$

alors $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k \in \mathcal{M}_1$.

En effet,

$$\mathbb{P}(B \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(B_k \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}(C_n)$$

$$= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}(C_n)$$

Donc $B \in \mathcal{M}_1$.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone et $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}_1$

Donc

$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall C_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, \forall C_n \in \mathcal{C}_n,$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(C_n).$$

Pour continuer, on fixe $B_1 \in \mathcal{B}_1, C_3 \in \mathcal{C}_3, \dots, C_n \in \mathcal{C}_n$, on définit

$$\mathcal{M}_2 = \{ B_2 \in \mathcal{B}_2 : \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(C_n) \}$$

On montre de même que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone contenant $\mathcal{B}_2$ et donc $\sigma(\mathcal{B}_2) = \mathcal{D}_2$ par le lemme des classes monotones.

On arrive ainsi au résultat voulu par récurrence.

**Idée :**

propriété vraie sur un $\pi$-système

$\rightsquigarrow$ également vraie sur la tribu engendrée (lorsque la propriété définit une classe monotone)

**Corollaire** Soit $X_1 : \Omega \to (E_1, \mathcal{E}_1)$, $\dots$, $X_n : \Omega \to (E_n, \mathcal{E}_n)$ des v.a.
Soit $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{E}_i$ une classe stable par intersection finie contenant $E_i$ telle que $\sigma(\mathcal{A}_i) = \mathcal{E}_i$.
On suppose $\forall A_i \in \mathcal{A}_i$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

Alors $X_1, \dots, X_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$

(On applique la proposition avec $\mathcal{B}_i = \sigma(X_i)$
$= X_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$
et $\mathcal{C}_i = X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$

(conseil : essayez d'écrire les détails)

**Remarque** la réciproque est clairement vraie.

## Application importante

(1) $X_1, \dots, X_n$ v.a. dans $\mathbb{Z}$. Elles sont $\perp\!\!\!\perp$ ssi

$\forall i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n)$$

(2) Soit $X_1, \dots, X_n$ v.a. dans $\mathbb{R}$. Elles sont $\perp\!\!\!\perp$ ssi $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) =$$

$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$

<u>Preuve</u> : $\boxed{\Rightarrow}$ Clairement vrai :

$X_1, \ldots, X_n \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$
$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$ pour $A_i$ mesurable ;

prendre $A_j = \{i_j\}$ ou $A_i = ]-\infty, x_i]$

$\boxed{\Leftarrow}$ 1 On prend

$\mathcal{R} = \{\mathbb{Z}\} \cup \{\{i\} : i \in \mathbb{Z}\}$
$\pi$-système générateur de $\mathbb{Z}$

$\forall A_i \in \mathcal{R}_i : \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$
$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$

Rappel

Pour vérifier $(\star)$ par hypothèse c'est clair lorsque $A_i$ est un singleton. Lorsque $A_i = \mathbb{Z}$, on somme juste sur les entiers.
Par exemple :

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1, X_2 \in \mathbb{Z}, X_3 = i_3)$$

$$= \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3)$$

2 On prend

$\mathcal{A} = \{\mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$

$\pi$-système générateur de $\mathcal{B}$.

Pour vérifier $(\star)$ avec $A_k = \mathbb{R}$ on fait juste tendre $x_k \to \infty$.

## Corollaire (principe des coalitions / regroupement par paquets)

Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des tribes $\perp\!\!\!\perp$ et $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_p < n$. Alors les tribes

$$\mathcal{D}_1 = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1})$$

$$\mathcal{D}_2 = \sigma(\mathcal{B}_{n_1+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_2})$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{D}_p = \sigma(\mathcal{B}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathcal{B}_n)$$

sont $\perp\!\!\!\perp$

$$\underbrace{\mathcal{B}_1, \dots \dots}_{\mathcal{D}_1} \quad \underbrace{\dots \dots}_{\mathcal{D}_2} \quad \dots \quad \underbrace{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{D}_p}$$

⚠ ⚠ ⚠ ⚠

en général une union de tribes n'est pas une tribe c'est pour cela qu'on prend $\mathcal{D}_1 = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ et pas $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$

ceci provient de la proposition appliqué avec

$$\mathcal{C}_j = \{ B_{n_{j-1}+1} \cap \dots \cap B_{n_j}$$

avec $B_i \in \mathcal{D}_i$ pour $n_{j-1}+1 \leq i \leq n_j \}$, $\pi$-système générateur de $\mathcal{D}_j$ contenant $\Omega$.

[exercice : vérifier $\sigma(\mathcal{C}_j) = \mathcal{D}_j$]

Par conséquent, si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. $\perp\!\!\!\perp$ et $f_1, \dots, f_p$ mesurables, alors

$f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \dots, f_p(X_{n_{p-1}+1}, \dots, X_n)$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

**Exemple** Si $X_1, X_2, X_3, X_4$ sont des v.a. $\perp\!\!\!\perp$ réelles.

Alors $X_1 X_3 \perp\!\!\!\perp X_2^3 + X_4$

## 3) Indépendance de familles infinies

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

**Définition** • Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$ ($I$ quelconque). Elles sont $\perp\!\!\!\perp$ si

$$\forall J \subset I, \ \#J < \infty,$$

$(\mathcal{B}_j)_{j \in J}$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

• De même des v.a. $(X_i)_{i \in I}$ sont $\perp\!\!\!\perp$ si

$\forall J \subset I, \ \#J < \infty, \ (X_j)_{j \in J}$ sont $\perp\!\!\!\perp$

On verra un peu plus tard comment construire une famille infinie de v.a. $\perp\!\!\!\perp$.

**Lemme** (version "infinie" du lemme des coalitions).

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a.

Alors

$$\mathcal{B}_1 = \sigma(X_1, \dots, X_p)$$

et $\mathcal{B}_2 = \sigma(X_k : k \geq p+1)$

sont $\perp\!\!\!\perp$

Idée de preuve : on utilise la proposition de 2) avec

$$\mathcal{C}_1 = \sigma(X_1, \dots, X_p) = \mathcal{B}_1$$

et

$$\mathcal{C}_2 = \bigcup_{k=p+1}^{\infty} \sigma(X_{p+1}, \dots, X_k) \subset \mathcal{B}_2$$

exercice : vérifier que $\mathcal{C}_2$ est un $\pi$-système générateur de $\mathcal{B}_2$ contenant $\Omega$ et que

$\forall C_1 \in \mathcal{C}_2, \ \forall C_2 \in \mathcal{C}_?,$

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2)$$

# 4) Lemmes de Borel-Cantelli

On commence par un peu de vocabulaire/notations :

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

Soit $A \in \mathcal{A}$.

" $\omega \in A$ " se lit / s'interprète
" $\omega$ réalise l'événement $A$ "

Ainsi

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ réalise } A\}.$$

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ des événements.

On pose

$A^* = \{ \omega \in \Omega : \omega \in A_n$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N} \}$
$= \{$ les $A_n$ sont réalisés infiniment souvent $\}$

$A_* = \{ \omega \in \Omega : \omega \in A_n$ pour tout $n$ assez grand $\}$
$= \{$ tous les $A_n$ sont réalisés à partir d'un certain rang $\}$

**FAIT 1** (exercice)

$$A^* = \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} A_n$$

$$A_* = \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} A_n$$

On remarque aussi que

$$\mathbb{1}_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$$

$$\mathbb{1}_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$$

Cela justifie les <u>notations</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \limsup A_n &= \bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} A_n \\ \liminf A_n &= \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{n\geq N} A_n \end{aligned}}$$

Ainsi

- $\omega \in \limsup A_n$

$\iff \{ n : \omega \in A_n \}$ est infini

$\iff$ "$A_n$ est réalisé une infinité de fois"

- $\omega \in \liminf A_n$

$\iff \exists\, n(\omega)$ tq $n \geq n(\omega) \Rightarrow \omega \in A_n$

$\iff$ "$A_n$ est réalisé à partir d'un certain rang"

**Exemple** Si $A_n = \{ S_n = 0 \}$

$\omega \in \limsup A_n \iff \{ S_n = 0$ une infinité de fois $\}$

$\omega \in \liminf A_n \iff \{ S_n = 0$ à partir d'un certain rang $\}$

**Fait 2**

$$\limsup (A_n^c) = (\liminf A_n)^c$$

Les 2 résultats suivants sont TRÈS utiles pour montrer que certains évènements ont probabilité 0 ou 1, et expliquent l'importance de $\limsup A_n$.

**Théorème** (lemmes de Borel-Cantelli)

1 On suppose $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Alors

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

② On suppose $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et $\underbrace{(A_n)_{n\geq 1} \perp\!\!\!\perp}$. Alors

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

(**Intuition** : $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_n)$ petit

$\Rightarrow A_n$ pas beaucoup réalisé)

**Preuve**

① On écrit

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$$

Donc p.s. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} < \infty$.

Donc p.s. $A_n$ est réalisé

un nombre fini de fois

Donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

(2) On fixe $n \geq l \geq 1$ et on écrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=l}^{n} A_k^c\right) = \prod_{k=l}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) \quad (\text{par } \perp\!\!\!\perp)$$

$$= \prod_{k=l}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$= \exp\left(\sum_{k=l}^{n} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))\right)$$

$$\leq \exp\left(-\sum_{k=l}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right).$$

On fait $n \to \infty$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=\ell}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} \bigcap_{k=\ell}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

$$= \mathbb{P}(\liminf(A_n^c))$$

$$= \mathbb{P}((\limsup A_n)^c)$$

Donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Voyons deux applications.

**Application 1** Notons

$A_n = \{ kn : n \geq 0 \}$.

Alors il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } n \geq 1$$

En effet, raisonnons par l'absurde. Notons

$$\mathcal{P} = \{ p \text{ premier} \}.$$

Alors $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ sont $\perp\!\!\!\perp$. En effet, si $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ sont $\neq$,

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_k})$$

$$= \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_k})$$

$$= \frac{1}{p_1 \cdots p_k} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Par ailleurs, on sait que

$$\sum_{p \in P} \mathbb{P}(A_p) = \sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

Donc par BC2

$\mathbb{P}$ - presque tout entier $n$ appartient à une infinité de $A_p$.

Absurde car un entier $n$ n'est divisible que par un nombre fini de nombres premiers.

## Application 2 (développement dyadique)

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ avec $\lambda$ : mesure de Lebesgue.

Pour $n \geq 1$, $\omega \in \Omega$ on pose

$$X_n(\omega) = \lfloor 2^n \omega \rfloor - 2 \cdot \lfloor 2^{n-1} \omega \rfloor$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière.

**Proposition** $(X_n)_{n \geq 1}$ sont iid (= indépendantes et identiquement distribuées) de loi $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

<u>Remarque</u> On vérifie que
$X_n(\omega) \in \{0,1\}$, que
$$0 \leq \omega - \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) 2^{-k} < 2^{-n},$$
ce qui montre que
$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi $(X_k(\omega))_{k \geq 1}$ sont les coefficients du développement dyadique de $\omega$.

<u>Preuve</u> : Pour $i_1, \dots, i_p \in \{0,1\}$ on remarque
$$\{X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p\} = \left[ \sum_{j=1}^{p} \frac{i_j}{2^j}, \sum_{j=1}^{p} \frac{i_j}{2^j} + 2^{-p} \right[$$

Donc $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p)$

$= \dfrac{1}{2^p}$

En sommant sur $i_1, \dots, i_{p-1}$ on obtient $\mathbb{P}(X_p = i_p) = \dfrac{1}{2}$

De même $\mathbb{P}(X_k = i_k) = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p)$

$= \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X_k = i_k)$

Donc $(X_1, \dots, X_p)$ sont $\underline{\perp\!\!\!\perp}$.

Donc $(X_k)_{k \geq 1}$ sont $\underline{\perp\!\!\!\perp}$.

**Proposition** p.s. on a $\forall p \geq 1$, $i_1, \dots, i_p \in \{0,1\}$,

$$\#\{k \geq 0 : X_{k+1} = i_1, \dots, X_{k+p} = i_p\} = \infty$$

Autrement dit, pour presque tout réel $x$ de $[0,1[$, n'importe quelle suite finie de 0 et de 1 apparaît une infinité de fois dans le développement en base 2 de $x$.

$(*)$

<u>Preuve</u> : problème pas d'$\perp\!\!\!\perp$

en effet $(X_1, X_2) \not\perp\!\!\!\perp (X_2, X_3)$

<u>idée</u> pour faire apparaître de l'indépendance, on fait des paquets :

$$Y_n = (X_{np+1}, X_{np+2}, \dots, X_{np+p})$$

<u>Exemple $p=2$</u> :
$(X_1, X_2)\ (X_3, X_4)\ (X_5, X_6) \dots$

D'après le principe des coalitions, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont <u>$\perp\!\!\!\perp$</u>.

On pose alors

$$A_n = \{ Y_n = (i_1, \dots, i_p) \}$$

alors $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^p}$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty.$$

Par ailleurs $(A_n)_{n\geq 1}$ sont $\perp\!\!\!\perp$

Donc par $\boxed{BC2}$ p.s

$A_n$ est réalisé une infinité de fois :

$\forall p, \forall i_1, \dots, i_p \in \{0,1\}$

p.s $\#\{k \geq 0 : X_{k+1} = i_1, \dots, X_{k+p} = i_p\} = \infty$

Idée dé on peut

toujours intervertir
"$\forall \in$ ensemble dénombrable"
et "p.s".
En effet, si $\mathbb{P}(B_n)=1$
$\forall n \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big)=1$$

(exercice)
Donc
p.s $\forall p, \forall i_1, \ldots, i_p \in \{0,1\}$,

$$\#\{k\geq 0 : X_{k+1}=i_1, \ldots, X_{k+p}=i_p\} = \infty$$

## Conclusion :

Autrement dit, pour presque tout réel $x$ de $[0,1[$, n'importe quelle suite finie de 0 et de 1 apparaît une infinité de fois dans le développement en base 2 de $x$.
$(\ast)$

**Remarque** il n'est pas facile d'exhiber explicitement un réel de $[0,1[$ qui vérifie $(\ast)$

Ici on voit la puissance d'un argument probabiliste pour un problème d'existence