Théorèmes limites et applications : exercices corrigés

Igor Kortchemski

Ce document est un recueil d'exercices et de problèmes corrigés issus des travaux dirigés, devoirs maison et examens du cours de M2 *Théorèmes limites et applications* enseigné au M2 de l'aléatoire de l'Université Paris-Saclay entre 2020 et 2025.

Les notes de cours peuvent être trouvées à l'adresse

https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/M2/TheoremesLimites-cours.pdf

La première partie du cours était consacrée à l'étude de la notion de convergence en loi, d'abord dans $\mathbb{R}^n$, puis dans un cadre assez général où les objets aléatoires considérés prennent leurs valeurs dans un espace métrique complet et séparable. On y démontrait en particulier le théorème de Prokhorov qui caractérise les familles de mesures de probabilité relativement compactes pour la topologie de la convergence en loi.

Dans un second temps, cette théorie était appliquée à l'étude de la convergence en loi dans l'espace des fonctions continues à valeurs réelles, puis dans l'espace des fonctions càdlàg à valeurs réelles. On établissait en particulier le théorème de Donsker, selon lequel une marche aléatoire à pas indépendants et de même loi converge après renormalisation vers un mouvement brownien.

La dernière partie du cours était consacrée à l'étude des mesures aléatoires de Poisson.

Si vous relevez des coquilles ou erreurs, n'hésitez pas à me les signaler en m'envoyant un mail à igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Table des matières

1 Convergence étroite dans $\mathbb{R}^k$

On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^k$, avec $k \geq 1$ un entier fixé, et $\Rightarrow$ désigne la convergence étroite dans cet espace

1.1 Exercices

Exercice 1.1. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Y a-t-il des implications entre les assertions suivantes ?

(a) μ_n est à densité pour n assez grand

(b) μ est à densité

(c) μ_n est atomique pour n assez grand

(d) μ est atomique.

Rappelons qu'une mesure atomique est une mesure qui s'écrit $\sum a_i \delta_{b_i}$ pour des suites $a_i \in \mathbb{R}_+$ et $b_i \in \mathbb{R}$ et que dans $\mathbb{R}^n$ par mesure à densité on entend par rapport à la mesure de Lebesgue (l'usage est juste de dire à densité).

* * *

Exercice 1.2. Montrer qu'une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue si et seulement si il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ telle que $f(x) \to \infty$ pour $|x| \to \infty$ et $\sup_{i\in I} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu_i < \infty$.

* * *

Exercice 1.3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $c_n \to 0$ on a $\mathbb{P}(c_n|X_n| \geq \varepsilon) \to 0$.

* * *

Exercice 1.4. – *(Théorème de Riesz et lemme de Scheffé)* – Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure positive (pas forcément finie). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f_n \to f \quad \mu-\text{presque partout.} \tag{1}$$

(1) On suppose que la convergence (1) a lieu, que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$. Démontrer que $f_n \to f$ dans $L^p(\mu)$ (théorème de Riesz).

On pourra introduire la fonction $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

(2) Montrer le lemme de Scheffé :

$$\text{si (1)}, f_n \text{ et } f \text{ sont } \mu \text{ intégrables,} \quad f_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_E f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$$

alors $\displaystyle\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives qui converge presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Montrer que X_n converge vers X dans L^1.

(4) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \geq 1$, X_n a pour loi $f_n d\mu$ (i.e. sa loi a une densité f_n par rapport à μ). Montrer que si f_n converge μ-presque partout vers une densité de probabilité f, alors $X_n \Rightarrow X$, où X est une variable aléatoire de loi $f\,d\mu$.

***

Exercice 1.5. – (Transformée de Laplace) – Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. Sa transformée de Laplace est définie par l'intégrale $L_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\mu(\mathrm{d}x)$ pour $t \geq 0$.

(1) Vérifier que L_μ est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$.

(2) Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\mu([0,x[) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t),$$

où $L_\mu^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de L_μ. En déduire que si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ ont même transformée de Laplace, alors $\mu = \nu$.

(3) Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. On suppose que L_{μ_n} converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction L continue à droite en 0. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ telle que $L = L_\mu$ et $\mu_n \Rightarrow \mu$.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Lévy.

***

Exercice 1.6. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad |x-y| \leq \delta \implies |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(y)| \leq \varepsilon.$$

(en d'autres termes, la suite $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue).

(2) On suppose que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Montrer que ϕ_{μ_n} converge vers ϕ_μ uniformément sur tout compact. Donner un exemple où la convergence n'est pas uniforme.

(3) La réciproque de l'énoncé de la première question est-elle vraie, autrement dit est-ce que si la suite $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue alors la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue ?

***

Exercice 1.7. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sans atomes. Montrer que $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si $\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_\mu(s)| \to 0$.

***

Exercice 1.8. – *(Théorème de Glivenko-Cantelli)* – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On considère $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ la mesure empirique de ces variables aléatoires. On note F_n la fonction de répartition de μ_n et F celle de μ. Le but de cet exercice est de le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$\text{presque sûrement,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| = 0. \tag{$\star$}$$

(1) Montrer $(\star)$ lorsque μ est la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on pose $G(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\}$ (appelé inverse généralisé de F). Il est possible de vérifier que G est croissante, continue à gauche en tout point. Soit $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

(2) (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$ on a

$$F(t) \geq x \iff t \geq G(x). \tag{2}$$

(b) Montrer que $(G(Y_i))_{1\leq i\leq n}$ sont des variables indépendantes de même loi μ.

(c) Montrer que F_n et $A_n \circ F$ ont même loi, où A_n est la fonction de répartition empirique des $Y_1, \ldots, Y_n$.

(3) En déduire $(\star)$.

* * *

Exercice 1.9. – *(Caractérisation des fonctions de répartition dans $\mathbb{R}^k$.)* – Pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ on note $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Soit $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ une fonction. On dit qu'elle est *continue à droite* si $F(x^n) \to F(x)$ lorsque $x^n \downarrow x$. On dit qu'elle est *propre* si $F(x) \to 1$ lorsque $\min_i x_i \to \infty$ et $F(x) \to 0$ lorsque $\min_i x_i \to 0$. On dit qu'elle est une *fonction de répartition* s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ telle que $F(x) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^k : y \leq x\})$.

(1) Donner un exemple de fonction $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ continue à droite, propre, croissante en chacune de ses variables et qui n'est pas une fonction de répartition.

On dit que F est à *accroissements positifs* si pour tout pavé $]x,y] =]x_1,y_1] \times \cdots \times]x_k,y_k]$ on a $F(]x,y]) := \sum_u s(u)F(u) \geq 0$, où la somme est prise sur tous les coins u de $]x,y]$ et $s(u) = (-1)^p$ avec $p = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{u_i = y_i}$.

(2) Montrer que $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ est une fonction de répartition si et seulement si elle est continue à droite, propre, et est à accroissements positifs.

Pour une preuve probabiliste de la réciproque, on pourra justifier l'existence pour tout $n \geq 1$ de mesures de probabilité μ_n à support dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^k$) telles que $\mu_n(x/2^n) = F(]2^{-n}(x-1), 2^{-n}x])$ pour $x \in \mathbb{Z}^k$, et de variables aléatoires $(X^n)_{n\geq 1}$ telles que X^n soit de loi μ_n et $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$, et enfin considérer $X = \lim_{n\to\infty} X^n$.

* * *

Exercice 1.10. Soit (E,d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne et $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est mesurable.

Indication. Pour $\varepsilon, \delta > 0$, on pourra vérifier que $U_{\varepsilon,\delta} := \{x \in E : \exists y, z \in B(x,\varepsilon), |f(y) - f(z)| > \delta\}$ est ouvert.

* * *

Exercice 1.11. Soit μ_n, μ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\phi_\nu(t) = \int e^{itx}\nu(\mathrm{d}x)$ pour une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$.

(1) Démontrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si la fonction caractéristique de μ_n converge simplement vers la fonction caractéristique de μ pour presque tout point par rapport à la mesure de Lebesgue.

(2) Est-il vrai que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si la fonction caractéristique de μ_n converge simplement sur un ensemble dénombrable dense vers la fonction caractéristique de μ ?

* * *

Exercice 1.12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X des variables aléatoires réelles. Soit D un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}$.

(1) Alix dit : « si X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$, alors pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$. » A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : « si pour tout $u \in D$ on a $\mathbb{P}(X_n \leq u) \to \mathbb{P}(X \leq u)$ lorsque $n \to \infty$, alors X_n converge en loi vers X lorsque $n \to \infty$. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

* * *

1.2 Solutions

Solution de l'exercice 1.1. Non :

– si μ_n est à densité, μ peut aussi bien être à densité (prendre $\mu = \mu_n$) qu'atomique (prendre $\mu_n(dx) = 2n\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x)dx$, qui converge étroitement vers δ_0), voire singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (penser à l'escalier du diable).

– si μ_n est atomique, μ peut aussi bien être atomique (prendre $\mu = \mu_n$) ou bien à densité (prendre $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, qui converge étroitement vers la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$).

* * *

Solution de l'exercice 1.2. $\boxed{\Longleftarrow}$ Posons $C = \sup_{i\in I}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu_i$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f(x)| \geq C/(\varepsilon)$ pour $|x| \geq A$. On écrit, pour $i \in I$,

$$C \geq \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \geq \int_{\mathbb{R}\backslash[-A,A]} f\,d\mu \geq \frac{C}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}\backslash[-A,A]} d\mu_i,$$

de sorte que $\mu_i(\mathbb{R}\backslash[-A,A]) \leq \varepsilon$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que pour tout $n \geq 1$ et $i \in I$ on ait

$$\mu_i(\mathbb{R}\backslash[-A_n, A_n]) \leq \frac{1}{n^3}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite (A_n) est strictement croissante et $A_n \to \infty$. On définit alors f par $f(x) = 0$ si $|x| < A_1$ et $f(x) = n$ si $A_n \leq |x| < A_{n+1}$, de sorte que f est mesurable, $f(x) \to \infty$, et pour $i \in I$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_i &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[-A_{n+1},A_{n+1}]\backslash[-A_n,A_n]} f\, d\mu_i \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_i([-A_{n+1},A_{n+1}]\backslash[-A_n,A_n]) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_i(\mathbb{R}\backslash[-A_n,A_n]) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

* * *

Solution de l'exercice 1.3. Supposons que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Soit $\varepsilon > 0$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ une suitede réels positifs telle que $c_n \to 0$. Soit $\eta > 0$. Par tension, il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \eta$. Pour n assez grand, $\varepsilon/c_n \geq M$, et alors

$$\mathbb{P}(c_n|X_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \eta,$$

d'où le résultat.

Réciproquement, raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas tendue. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ et une extraction $\phi(n)$ telle que $\mathbb{P}\left(|X_{\phi(n)}| \geq n\right) \geq \varepsilon$ pour tout n. On définit alors la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ en posant $c_{\phi(k)} = k$ pour tout $k \geq 1$ et $c_i = k-1$ pour $\phi(k-1) \leq i < \phi(k)$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(c_{\phi(n)}|X_{\phi(n)}| \geq 1\right) \geq \varepsilon,$$

contradiction.

* * *

Solution de l'exercice 1.4.

(1) Par inégalité triangulaire, on remarque que $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \max(|f_n|^p, |f|^p) \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ de sorte que $g_n \geq 0$. Appliquons le lemme de Fatou à g_n :

$$2^{p+1} \int_E |f|^p \mathrm{d}\mu = \int_E (\liminf_{n\to\infty} g_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E 2^p(|f_n|^p + |f|^p)\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu \leq 0,$$

d'où le résultat.

(2) C'est simplement le théorème de Riesz pour $p = 1$.

(3) C'eſt simplement le lemme de Scheffé.

(4) Soit $s \in \mathbb{R}$. On montre que $\mathbb{P}(X_n \leq s) \longrightarrow \mathbb{P}(X \leq s)$. Pour cela, en notant $A =]-\infty, s]$, on remarque que

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

ce qui conclut.

Remarque. La même preuve montre qu'en fait $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$ pour tout borélien A. Ceci implique la convergence en loi, mais la réciproque n'eſt pas vraie (prendre par exemple à $\mu_n = \delta_{1/n} \Rightarrow \delta_0$ avec $A = \{0\}$).

* * *

Solution de l'exercice 1.5.

(1) Ceci provient du fait que pour tout entier $k \geq 1$, la dérivée k-ième de $t \mapsto e^{-tx}$ eſt μ-intégrable, puisque la fonction $x \mapsto x^k e^{-tx}$ eſt bornée sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t > 0$. En particulier,

$$L_\mu^{(k)}(t) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}_+} u^k e^{-tu} \mu(\mathrm{d}u).$$

(2) Soit $x > 0$. D'après la queſtion précédente et le théorème de Fubini,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \mu(\mathrm{d}u).$$

Or

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} = \mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor).$$

Montrons que

$$\mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx \rfloor) \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x < u \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = u \\ 1 & \text{si } x > u \end{cases}$$

en diſtinguant les trois cas :

– $x = u$: En notant $(Y_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de Poisson de paramètre x, on a

$$\mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tx) \leq \lfloor tx \rfloor) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor t \rfloor} - \lfloor t \rfloor x + \mathsf{Poisson}(\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x) - (\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x)}{\sqrt{tx}} \leq 0 \right)$$

avec $\mathsf{Poisson}(\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x)$ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lfloor tx \rfloor - \lfloor t \rfloor x$ indépendante de $(Y_i)_{i\geq 1}$. D'après le TCL,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor t \rfloor} - \lfloor t \rfloor x}{\sqrt{tx}} \leq 0 \right) \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}.$$

En remarquant que $|\lfloor tx\rfloor - \lfloor t\rfloor x| \leq 1+x$, on voit que $\frac{\mathsf{Poisson}(\lfloor tx\rfloor - \lfloor t\rfloor x) - (\lfloor tx\rfloor - \lfloor t\rfloor x)}{\sqrt{tx}} \to 0$ en probabilité lorsque $t\to\infty$ (ceci provient par exemple de l'inégalité de Markov)) donc d'après le lemme de Slutsky on conclut que $\mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tx) \leq \lfloor tx\rfloor) \to \frac{1}{2}$ lorsque $t\to\infty$.

Remarque. Plus formellement, on a utilisé le fait que si $X_n + Y_n \Rightarrow Z$, avec $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ et Y_n qui converge en probabilité vers 0, alors $X_n \Rightarrow Z$.

– $x < u$: alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx\rfloor) &= \mathbb{P}(tu - \lfloor tx\rfloor \leq tu - \mathsf{Poisson}(tu)) \\ &\leq \mathbb{P}(tu - \lfloor tx\rfloor \leq |tu - \mathsf{Poisson}(tu)|) \\ &\leq \frac{\mathsf{Var}(\mathsf{Poisson}(tu))}{(tu - \lfloor tx\rfloor)^2} \\ &\sim \frac{u}{t(u-x)}\end{aligned}$$

lorsque $t\to\infty$, qui tend donc vers 0.

– $x > u$: alors, de même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) \leq \lfloor tx\rfloor) &= 1 - \mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) > \lfloor tx\rfloor) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\mathsf{Poisson}(tu) - tu > \lfloor tx\rfloor - tu) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(|\mathsf{Poisson}(tu) - tu| > \lfloor tx\rfloor - tu)\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(|\mathsf{Poisson}(tu) - tu| > \lfloor tx\rfloor - tu) \leq \frac{\mathsf{Var}(\mathsf{Poisson}(tu))}{(\lfloor tx\rfloor - tu)^2} \sim \frac{u}{t(x-u)} \to 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor tx\rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{1}_{[0,x[}(u) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{x\}}(u).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{\lfloor tx\rfloor} \frac{(tu)^k}{k!} e^{-tu} \mu(\mathrm{d}u) \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{1}_{[0,x[}(u) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{x\}}(u))\mu(du) = \mu([0,x[) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}).$$

Supposons maintenant que $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ ont même transformée de Laplace. Notons D l'ensemble des atomes de μ et de ν, qui est au plus dénombrable. Alors d'après le résultat précédent, $\mu([x,y[) = \nu([x,y[)$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}\backslash D$. Puisque $\mathbb{R}\backslash D$ est dense, on en déduit que μ et ν coincident sur tout intervalle ouvert et donc $\mu = \nu$ par application du lemme des classes monotones.

(3) On remarque tout d'abord que si $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors L_{μ_n} converge simplement vers μ (la fonction $x \mapsto e^{-tx}$ étant continue bornée sur $\mathbb{R}_+$).

Il suffit de montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. En effet, on conclut alors la preuve comme pour le théorème de Lévy : soit μ la limite en loi le long d'une sous-suite ϕ_0 (qui existe par tension). On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, une extraction ϕ et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée telle que $|\mu_{\phi(n)}(f) - \mu(f)| \geq \varepsilon$. Par tension, il existe une extraction ψ telle que

$\mu_{\phi\circ\psi(n)} \Rightarrow \nu$ pour une certaine mesure $\nu \in M1(\mathbb{R})$. Comme $L_{\mu_{\phi_0(n)}}$ converge simplement vers L_μ, comme $L_{\mu_{\phi_0(n)}}$ converge simplement vers L_μ et comme L_{μ_n} converge simplement vers L, on en déduit que $L = L_\mu = L_\nu$ et donc $\mu = \nu$.

Pour montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue, on écrit

$$\begin{aligned} K\int_0^{1/K}(1-L_{\mu_n}(t))\mathrm{d}t &= K\int_0^{1/K}\left(1-\int_0^\infty e^{-tx}\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}t \\ &= K\int_0^\infty\int_0^{1/K}(1-e^{-tx})\mathrm{d}t\mu_n(\mathrm{d}x) \\ &\geq K\int_K^\infty\int_0^{1/K}(1-e^{-tx})\mathrm{d}t\mu_n(\mathrm{d}x) \\ &\geq K\int_K^\infty\int_0^{1/K}(1-e^{-Kt})\mathrm{d}t\mu_n(\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{e}\mu_n([K,\infty[). \end{aligned}$$

Or par convergence dominée $K\int_0^{1/K}(1-L_{\mu_n}(t))\mathrm{d}t \to K\int_0^{1/K}(1-L_\mu(t))\mathrm{d}t$ et par continuité à droite $K\int_0^{1/K}(1-L_\mu(t))\mathrm{d}t \to 0$ lorsque $K\to\infty$. On en déduit aisément la tension de $(\mu_n)_{n\geq 1}$.

* * *

Solution de l'exercice 1.6.

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n(\mathbb{R}\backslash[-M,M]) \leq \varepsilon$. Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta$ et $t \in [-M,M]$ impliquent $|e^{itx}-e^{ity}| \leq \varepsilon$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} |\phi_{\mu_n}(x)-\phi_{\mu_n}(y)| &= \int_{[-M,M]}|e^{itx}-e^{ity}|\mu_n(dt)+\int_{\mathbb{R}\backslash[-M,M]}|e^{itx}-e^{ity}|\mu_n(dt) \\ &\leq \varepsilon+2\mu_n(\mathbb{R}\backslash[-M,M]) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

(2) On sait que ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ_μ. C'est alors un résultat général : si une suite de fonctions réelles sur un compact est uniformément équicontinue et converge simplement, alors elle converge uniformément. Pour le démontrer dans notre cas précis, soit $\varepsilon > 0$ et K un compact. Soit $\delta > 0$ tel que l'implication de la première question est vraie. En passant à la limite, remarquons tout d'abord que $|x-y| \leq \delta$ implique $|\phi_\mu(x)-\phi_\mu(y)| \leq \varepsilon$. Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules $(B(x_i,\delta))_{1\leq i\leq k}$. Soit N tel que $n \geq N$ implique $\max_{1\leq i\leq k}|\phi_{\mu_n}(x_i)-\phi_\mu(x)| \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N$, soit $x \in K$. En notant $1 \leq i \leq k$ l'entier tel que $x \in B(x_i,\delta)$:

$$|\phi_{\mu_n}(x)-\phi_\mu(x)| \leq |\phi_{\mu_n}(x)-\phi_{\mu_n}(x_i)|+|\phi_{\mu_n}(x_i)-\phi_\mu(x_i)|+|\phi_\mu(x_i)-\phi_\mu(x)| \leq 3\varepsilon,$$

ce qui conclut.

En prenant par exemple $X_n = 1/n$ et $X = 0$, on a $\phi_{X_n}(t) = e^{it/n} \to \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais $\|\phi_{X_n}-\phi_X\|_\infty = 2$ pour tout $n \geq 1$.

(3) Oui : si $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue, comme $|\phi_{\mu_n}(0)| = 1$, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, la suite $(\phi_{\mu_n})_{n\geq 1}$ a des sous-suites qui convergent uniformément sur tout compact. Par procédé diagonal (en se restreignant par exemple à des compacts $[-N, N]$ avec N entier), on trouve une extraction γ telle que $(\phi_{\mu_{\gamma(n)}})_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction limite continue ϕ. D'après le théorème de Lévy, ϕ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité vers laquelle $(\phi_{\mu_{\gamma(n)}})_{n\geq 1}$ converge étroitement.

***

Solution de l'exercice 1.7. La réciproque est claire. Le sens direct est une conséquence du deuxième théorème de Dini. Donnons ici une approche dans le contexte de l'exercice. Fixons $k \geq 2$. L'application F_μ étant continue, croissante, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en ∞, il existe des points $s_1 < \cdots < s_{k-1}$ tels que $F_\mu(s_i) = \frac{i}{k}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Par convergence simple, pour n assez grand, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{i-1}{k} \leq F_{\mu_n}(s_i) \leq \frac{i+1}{k}.$$

Par convention, posons $s_0 = -\infty$ et $s_k = \infty$. Il vient que pour tout n assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}$, en choisissant s_i tel que $s_i \leq s < s_{i+1}$:

$$F_{\mu_n}(s) \leq F_{\mu_n}(s_{i+1}) \leq \frac{i+2}{k} = F_\mu(s_i) + \frac{2}{k} \leq F_\mu(s) + \frac{2}{k}$$

et de même

$$F_{\mu_n}(s) \geq F_{\mu_n}(s_i) \geq \frac{i-1}{k} = F_\mu(s_{i+1}) - \frac{2}{k} \geq F_\mu(s) - \frac{2}{k}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_\mu(s)| \leq \frac{2}{k},$$

ce qui conclut.

***

Solution de l'exercice 1.8.

(1) On suit la même approche que pour l'exercice 7. Fixons $k \geq 2$. Il existe des points $s_1 < \cdots < s_{k-1}$ tels que $F(s_i) = \frac{i}{k}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. D'après la loi des grands nombres, presque sûrement, pour n assez grand, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{i-1}{k} \leq F_{\mu_n}(s_i) \leq \frac{i+1}{k}.$$

Par convention, posons $s_0 = -\infty$ et $s_k = \infty$. Il vient que pour tout n assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}$, en choisissant s_i tel que $s_i \leq s < s_{i+1}$:

$$F_{\mu_n}(s) \leq F_{\mu_n}(s_{i+1}) \leq \frac{i+2}{k} = F_\mu(s_i) + \frac{2}{k} \leq F_\mu(s) + \frac{2}{k}$$

et de même

$$F_{\mu_n}(s) \geq F_{\mu_n}(s_i) \geq \frac{i-1}{k} = F_\mu(s_{i+1}) - \frac{2}{k} \geq F_\mu(s) - \frac{2}{k}.$$

Ainsi, presque sûrement, pour n assez grand,

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F(s)| \leq \frac{2}{k}.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \geq 2$, ceci conclut.

(2) (a) Si $F(t) \geq x$, alors clairement $\inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\} \leq t$ et donc $G(x) \leq t$. Réciproquement, montrons que $F(t) < x$ implique $t < G(x)$. Puisque F est continue à droite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(t+\varepsilon) < x$. On a alors $G(x) \geq t+\varepsilon > t$.

(b) Elles sont clairement indépendantes de même loi et d'après la question précédente, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\mathbb{P}(G(Y_1) \leq t) = \mathbb{P}(F(t) \geq Y_1) = F(t),$$

d'où le résultat.

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer que $X_i = G(Y_1)$. On a alors

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}(\{1 \leq i \leq n : G(Y_i) \leq t\} = \frac{1}{n}\mathrm{Card}(\{1 \leq i \leq n : Y_i \leq F(t)\} = A_n(F(t)).$$

(3) D'après (1), on a

$$\text{presque sûrement,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |A_n(s) - s| = 0,$$

ce qui implique

$$\text{presque sûrement,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |A_n(F(s)) - F(s)| = 0,$$

et le résultat désiré en découle par (c).

* * *

Solution de l'exercice 1.9.

(1) Prenons $F(x_1,x_2) = \mathbb{1}_{x_1+x_2\geq 0}$. S'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ telle que F soit sa fonction de répartition, on a alors $\mu([-1,2]\times[-1,2]) = F(2,2) - F(2,-1) - F(-1,2) + F(-1,-1) = -1$, absurde.

(2) L'implication est claire (si F est la fonction de répartition de $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$, la propriété d'être à accroissements positifs provient du fait que $\sum_u s(u)F(u) = \mu(]x,y])$ – en reprenant les notations de l'énoncé).

Puisque F est propre et à accroissements positifs, il existe bien des mesures de probabilité μ_n à support dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^k)$ telles que $\mu_n(x/2^n) = F(]2^{-n}(x-1), 2^{-n}x])$ pour $x \in \mathbb{Z}^k$.

Ensuite, par construction, F est finiment additive sur les pavés, de sorte que pour $x \in \mathbb{Z}^k$ et $1 \leq m < n$:

$$\mu_m(2^{-m}]x-1,x]) = \mu_n(2^{-m}(x-1,x]).$$

Ceci permet de construire par récurrence une suite de variables aléatoires $(X^n)_{n\geq 1}$ telles que X^n soit de loi μ_n et $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$ à partir d'une suite de variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$. En effet, supposons $X^1, \ldots, X^n$ construites. Puisque

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_k=0 \text{ ou } 1} &\mu_{n+1}\left(\left]X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}} - 2^{-n-1}\right], \ldots, \left]X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} - 2^{-n-1}\right]\right) \\ &= \mu_n\left(\left]X^n - \frac{1}{2^n}, X^n\right]\right),\end{aligned}$$

on construit X^{n+1} sachant X^n de sorte que pour $i_1, \dots, i_k = 0$ ou 1,

$$X^{n+1} = \left(X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, \dots, X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} \right)$$

avec probabilité

$$\frac{1}{\mu_n\left(\left]X^n - \frac{1}{2^n}, X^n\right]\right)} \mu_{n+1}\left(\left]X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_1}{2^{n+1}} - 2^{-n-1}\right], \dots, \left]X_k^n - \frac{i_k}{2^{n+1}}, X_1^n - \frac{i_k}{2^{n+1}} - 2^{-n-1}\right]\right).$$

On a bien $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$ pour tout $m < n$, ce qui permet par monotonie de définir $X = \lim_{n\to\infty} X^n$.

Vérifions que la fonction de répartition de X est F. Soit $x \in \mathbb{R}^k$ dyadique. En particulier, $\mathbb{P}(X^n \leq x) = F(x)$. Par ailleurs, d'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{X^n < x}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X^n < x) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X^n \leq x) \leq F(x) = \mathbb{P}(X^n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x).$$

Ainsi,

$$F(x) \leq \mathbb{P}(X \leq x) < \mathbb{P}(X < x + 2^{-n}) \leq F(x + 2^{-n}).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on conclut en utilisant la continuité à droite de F.

* * *

Solution de l'exercice 1.10. Vérifions tout d'abord que $U_{\varepsilon,\delta}$ est bien ouvert. Si $x \in U_{\varepsilon,\delta}$ et $y, z \in B(x, \varepsilon)$ sont tels que $|f(y) - f(z)| > \delta$, alors pour tout x' tel que $d(x, x') < \varepsilon - \max(d(x,y), d(x,z))$ on a $x' \in U_{\varepsilon,\delta}$. En particulier, $U_{\varepsilon,\delta}$ est mesurable. On conclut en remarquant que l'ensemble des points de discontinuité de f s'écrit

$$\bigcup_{\substack{\delta>0 \\ \delta\in\mathbb{Q}}} \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} U_{\varepsilon,\delta}.$$

* * *

Solution de l'exercice 1.11.

(1) L'implication est claire. Pour la réciproque ; on adapte la preuve du théorème de Lévy 1. Comme dans le cours 1, on a l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $A > 0$

$$\mu_n(\mathbb{R} \backslash [-A, A]) \leq cA \int_{-1/A}^{1/A} (1 - \mathrm{Re}\phi_{\mu_n}(u)) \mathrm{d}u \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad cA \int_{-1/A}^{1/A} (1 - \mathrm{Re}\phi_{\mu}(u)) \mathrm{d}u \quad \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

où la première convergence a lieu en vertu de la converge presque partout de ϕ_{μ_n} vers ϕ_μ et du théorème de converge dominée, et la seconde en vertu de la continuité de ϕ_μ en 0.

Ainsi $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Supposons que $\mu_{\psi(n)} \implies \nu$. D'après le théorème de Prokhorov, il suffit de vérifier que $\mu = \nu$. On a alors $\phi_{\mu_{\psi(n)}}(t) \to \phi_\nu(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or $\phi_{\mu_{\psi(n)}}(t) \to \phi_\mu(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\phi_\mu = \phi_\nu$ presque partout. Étant des fonctions continues, ces deux fonctions sont alors égales partout, ce qui conclut.

(2) C'est faux, on peut par exemple prendre $\mu_n = \delta_{2\pi n!}$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

* * *

Solution de l'exercice 1.12.

(1) Alix a tort. Par exemple si $D = \mathbb{Q}$, si $X_n = 1/n$ et $X = 0$, X_n converge en loi vers X, mais $\mathbb{P}(X_n \leq 0) \not\to \mathbb{P}(X \leq 0)$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Billie a raison.

Première solution. En notant E l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $a_i, b_i \in D$ avec $a_i < b_i$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ pour tout $f \in E$. Or par uniforme continuité, toute fonction continue à support compact est limite uniforme de fonctions dans E, ce qui montre que X_n converge en loi vers X d'après un résultat du premier cours.

Deuxième solution. Notons F et F_n les fonctions de répartition respectives de X et de X_n. Soit x un point de continuité de F. Par croissance, on a pour $u < x < v$ avec $u, v \in D$:

$$F(x) - F_n(v) \leq F(x) - F_n(x) \leq F(x) - F_n(u).$$

Ainsi, en faisant $n \to \infty$:

$$F(x) - F(v) \leq \liminf_{n\to\infty}(F(x) - F_n(x)) \leq \limsup_{n\to\infty}(F(x) - F_n(x)) \leq F(x) - F(u).$$

On conclut par continuité de F en x en faisant tendre u, v vers x.

* * *

2 Différents modes de convergence (presque sûre, en probabilité, L^1)

2.1 Exercices

Exercice 2.1. – *(Méthode des moments)* – Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On suppose que la loi de X est *caractérisée par ses moments*, c'est-à-dire que si Y est une variable aléatoire admettant des moments de tout ordre vérifie $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout entier $k \geq 1$, alors X et Y ont même loi.

(1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrables qui converge en loi vers Z. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[Z]$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant des moments de tout ordre. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n^k\right] \to \mathbb{E}\left[X^k\right]$. Montrer que $X_n \Rightarrow X$.

Remarque. Voir l'exercice 2.5 pour des conditions suffisantes pour qu'une variable aléatoire soit caractérisée par ses moments.

* * *

Exercice 2.2. Soit (E,d) un espace métrique et $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que si $X_n \to X$ presque sûrement ou en probabilité, alors $X_n \Rightarrow X$.

* * *

Exercice 2.3. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

(1) Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, la suite $(\max(X_1, \ldots, X_n)/n)_{n\geq 2}$ est uniformément intégrable.

(2) La réciproque est-elle vraie ?

* * *

Exercice 2.4. – *(Théorème de représentation de Skorokhod pour $\mathbb{R}$)* – Soit X une variable aléatoire réelle. On note F sa fonction de répartition et on pose, pour $0 \leq u \leq 1$, $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$. On rappelle (cf feuille d'exercices 1) que $F^{-1}(u) \leq x \iff u \leq F(x)$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X.

(1) Vérifier que F^{-1} est une fonction croissante continue à gauche de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout $u \in]0,1[$, on a

$$F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+),$$

où $F^{-1}(u+)$ est la limite à droite de F^{-1} en u.

(3) En déduire que si $X, X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$, il existe un espace de probabilité et des variables aléatoires $X', X'_1, X'_2, \ldots$ définies dessus telles que $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$, $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$ et X'_n converge presque sûrement vers X' lorsque $n \to \infty$.

* * *

Exercice 2.5. Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On pose $m_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$, $M_k = \mathbb{E}\left[|X|^k\right]$ pour $k \geq 1$ et $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que le rayon de convergence de $\mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k z^k}{k!}$ est non nul si et seulement si le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$ est non nul.

On suppose dans la suite que ces rayons de convergence sont non nuls et on note R le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$.

(2) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $|h| < R$ on a le développement en série entière $\phi(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(t)}{k!} h^k$.

(4) En déduire que la loi de X est caractérisée par ses moments.

* * *

Exercice 2.6. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires uniformément intégrables. En reprenant la construction de la fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ et $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[\phi(|X_i|)] < \infty$ (preuve du critère de de la Vallée Poussin), vérifier que ϕ peut être choisie de sorte que pour tout $x \geq 1$, $\phi'(2x) \leq 2\phi'(x)$, puis que ϕ peut être choisie de sorte que $\phi(x) \leq x^2$ pour $x \geq 1$.

* * *

Exercice 2.7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrable.

(1) Pour $n \geq 1$ on pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Montrer que l'adhérence dans L^1 de $\{X_n : n \geq 1\}$ forme une famille uniformément intégrable.

* * *

Exercice 2.8. Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans E. On suppose que $(\delta_{x_n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Que dire de X ?

* * *

Exercice 2.9. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable. Pour chaque mode de convergence que vous connaissez, étudier si le fait que toute sous-suite de $(X_n)_{n \geq 1}$ a une sous-suite qui converge vers X implique que X_n converge vers X.

* * *

Exercice 2.10. Soit (X_n) et (Y_n) des variables aléatoires réelles telles que $0 \leq X_n \leq Y_n$. On suppose que X_n converge en probabilité et que Y_n converge dans L^1. Montrer que X_n converge dans L^1.

* * *

Exercice 2.11. Soient $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires bornée dans L^p (c'est-à-dire $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} < \infty$). Démontrer que la famille $(XY_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.

* * *

Exercice 2.12. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X et on pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}.$$

Lorsque $n \to \infty$, est-ce que T_n converge dans L^1 ? Justifier votre réponse.

* * *

Exercice 2.13. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité telles que $Y_n \geq X_n \geq 0$ et $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ pour tout $n \geq 1$. On suppose que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire positive X telle que $\mathbb{E}[X] = 1$.

(1) Montrer que la suite de variables aléatoires $((X_n, Y_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers (X, X).

(2) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

* * *

Exercice 2.14. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ et $p > 0$.

(1) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}[[X_n - 1|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2) On suppose que $\mathbb{E}[X_n] \to \alpha$ et $\mathbb{E}[X_n^2] \to \alpha^2$ avec $\alpha \in [0, 1[$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[[X_n - \alpha|^p] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. Dans les deux cas, on pourra commencer par montrer que X_n converge en probabilité.

* * *

Exercice 2.15. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles. On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ pour $n \geq 1$. On considère l'assertion suivante :

$$(A): \qquad \text{si} \quad X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X, \qquad \text{alors} \quad S_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X.$$

Est-ce que l'assertion (A) est vrai pour les modes de convergence suivants ?

$\boxed{(1)}$ Convergence p.s. $\boxed{(2)}$ Convergence L^1

$\boxed{(3)}$ Convergence en probabilité $\boxed{(4)}$ Convergence en loi.

Justifiez vos réponses.

* * *

Exercice 2.16. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est absolument continue par rapport à la loi de Y_n de densité f_n. Cela signifie que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable telle que pour toute fonction mesurable positive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ou pour toute fonction mesurable bornée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] = \mathbb{E}[f_n(Y_n)F(Y_n)].$$

(1) On suppose que $f_n(Y_n)$ converge en probabilité vers 1 lorsque $n \to \infty$ et que Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y. Montrer que X_n converge en loi vers Y.

(2) On suppose que f_n est continue pour tout $n \geq 1$, que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, que Y_n converge presque sûrement vers Y et enfin que $\mathbb{E}[f(Y)] = 1$. Démontrer que X_n converge en loi.

* * *

Exercice 2.17. Soient $(X_k^n)_{k,n\geq 1}$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique E telles que pour tout $k \geq 1$, presque sûrement pour tout n assez grand on a $X_k^n = X_k$. Démontrer qu'il existe une suite (déterministe) $A_n \to \infty$ telle que

$$\mathbb{P}\Big(\text{pour tout } k \in \{1, 2, \ldots, A_n\} \text{ on a } X_k^n = X_k\Big) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1.$$

* * *

2.2 Solutions

Solution de l'exercice 2.1.

(1) *Première façon.* D'après le théorème de représentation de Skorokhod (exercice 9), puisque le caractère uniformément intégrable ne dépend que des lois individuelles, on peut supposer que la convergence $Z_n \to Z$ a lieu presque sûrement (et a fortiori en probabilité). D'après un résultat du deuxième cours, cette convergence a aussi lieu dans L^1, ce qui démontre le lemme

Deuxième façon. On applique un argument de troncature. Soit $K \geq 0$. On définit $h_K(x) = x$ si $|x| \leq K$, $h_K(x) = K$ si $x > K$ et $h_K(x) = -K$ si $x < -K$, de sorte que h_K est continue et bornée par K. La convergence en loi $Z_n \Rightarrow Z$ implique

$$\mathbb{E}\Big[h_K(Z_{n)}\Big] \to \mathbb{E}[h_k(Z)].$$

Par ailleurs, comme $|x - h_K(x)| \leq |x|\mathbb{1}_{\{|x|>K\}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}[Z_n - Z]\Big| &\leq \mathbb{E}\Big[|Z_n - h_K(Z_n)|\Big] + \Big|\mathbb{E}[h_K(Z_n) - h_K(Z)]\Big| + \mathbb{E}\Big[|h_K(Z) - Z|\Big] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[|Z_n|\mathbb{1}_{\{|Z_n|>K\}}\Big] + o(1) + \mathbb{E}\Big[|Z|\mathbb{1}_{\{|Z|>K\}}\Big].\end{aligned}$$

Combiné avec l'uniforme intégrabilité de $(Z_n^k)_{n\geq 1}$, ceci entraîne que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\mathbb{E}[Z_n - Z]\Big| \leq \mathbb{E}\Big[|Z|\mathbb{1}_{\{|Z|>K\}}\Big].$$

Vérifions que Z est intégrable.

Première façon. On a

$$E\left[|Z|\mathbf{1}_{\{|Z|>K\}}\right] = \int_K^\infty \mathbb{P}(|Z| \geq u)\,\mathrm{d}u.$$

Or, par convergence en loi, pour presque tout u par rapport à la mesure de Lebesgue on a $\mathbb{P}(|Z_n| \geq u) \to \mathbb{P}(|Z| \geq u)$. Ainsi, d'après le lemme de Fatou :

$$\int_K^\infty \mathbb{P}(|Z| \geq u)\,\mathrm{d}u \leq \liminf_{n\to\infty} \int_K^\infty \mathbb{P}(|Z_n| \geq u)\,\mathrm{d}u = \liminf_{n\to\infty} E\left[|Z_n|\mathbf{1}_{\{|Z_n|>K\}}\right] < \infty,$$

ce qui montre que Z est intégrable.

Deuxième façon. On écrit

$$\mathbb{E}[h_K(|Z|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[h_K(|Z_n|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[|Z_n|] + E\left[|Z_n|\mathbf{1}_{\{|Z_n|>K\}}\right].$$

En prenant la lim inf lorsque $n \to \infty$ puis en faisant $K \to \infty$, on conclut par uniforme intégrabilité et convergence monotone que $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.

(2) On montre la tension puis l'unicité de la limite.

Première étape : tension. Puisque $(\mathbb{E}[X_n^2])_{n\geq 2}$ converge, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue.

Seconde étape : unicité de la limite. Soit ϕ une extraction et Y une variable aléatoire telle que $X_{\phi(n)} \Rightarrow Y$. Soit $k \geq 1$ un entier. Puisque $(\mathbb{E}\left[(X_{\phi(n)})^{2k}\right])_{n\geq 1}$ converge, $(X^k_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Vérifions que

$$\mathbb{E}\left[|Y|^k\right] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[X^k_{\phi(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[Y^k\right]. \tag{3}$$

Le lemme implique (3), et on obtient $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \mathbb{E}\left[Y^k\right]$. Puisque X est caractérisée par ses moments, on en déduit que X et Y ont la même loi, ce qui conclut.

* * *

Solution de l'exercice 2.2. Si $X_n \to X$ presque sûrement, et si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors $f(X_n) \to f(X)$ presque sûrement et puisque $|f(X_n)| \leq \|f\|_\infty < \infty$, le théorème de convergence dominée implique $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.

Si $X_n \to X$ en probabilité, soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathbb{E}[f(X_n)] \not\to \mathbb{E}[f(X)]$. Il existe alors $\epsilon > 0$ et une extraction ϕ telle que $|\mathbb{E}\left[f(X_{\phi(n)})\right] - \mathbb{E}[f(X)]| \geq \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Or $X_{\phi(n)}$ converge en probabilité vers X, il existe donc une extraction ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))} \to X$ presque sûrement. Alors $f(X_{\phi(\psi(n))}) \to f(X)$ en loi et donc $\mathbb{E}\left[f(X_{\phi(\psi(n))}\right] \to \mathbb{E}[f(X)]$, absurde.

* * *

Solution de l'exercice 2.3.

(1) Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, on écrit

$$\left|\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{n}\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}.$$

D'après la loi des grands nombres, la suite $\frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}$ converge dans L^1 vers $\mathbb{E}[|X_1|]$. Elle est donc uniformément intégrable, ce qui implique que la suite $(\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{n})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Oui, si les variables aléatoires sont positives : le cas échéant, $0 \leq X_1/2 \leq \max(X_1, X_2)/2$ et donc $\mathbb{E}[X_1] < \infty$.

Non en général : par exemple, en prenant X_1 une variable aléatoire qui a pour densité $\frac{1}{|x|^2}\mathbb{1}_{x \leq -1}$, on voit que $\max(X_1, \ldots, X_n)$ a pour densité $\frac{n}{|x|^{n+1}}\mathbb{1}_{x \leq -1}$, de sorte que

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{n}\right|^{3/2}\right] = \frac{1}{n^{3/2}}\int_1^\infty \frac{nx^{3/2}}{x^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^{3/2}}\frac{2n}{2n-3}.$$

La suite $(\frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{n})_{n \geq 2}$ étant bornée dans $L^{3/2}$, elle est uniformément intégrable, bien que X_1 ne soit pas intégrable.

* * *

Solution de l'exercice 2.4.

(1) Pour la croissance de F^{-1}, si $u < v$ et si $F(x) \geq v$, on a alors $F(x) \geq u$, de sorte que $F^{-1}(u) \leq x$, et en passant à l'inf sur x on obtient $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(v)$.

Pour le caractère continu à gauche, supposons que $u_n \uparrow u$ mais que $F^{-1}(u_n) \nrightarrow F^{-1}(u)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $F^{-1}(u_n) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Donc $u_n \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$. En passant à la limite, $u \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$ et donc $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$, absurde.

(2) Soit $0 \leq u \leq 1$.

Pour montrer que $\limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+)$, il suffit de vérifier que

$$F(x) \geq u + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq x.$$

On montre la contraposée : supposons qu'il existe une extraction ϕ et $\eta > 0$ tels que $x + \eta \leq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour n assez grand. On choisit un point $x_0 \in [x, x+\eta[$ en lequel F est continu. Alors $F_{\varphi(n)}(x_0) < u$ pour n assez grand, et donc par convergence en loi de X_n vers X on en déduit que $F(x) \leq F(x_0) \leq u < u + \varepsilon$.

Pour montrer que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$, considérons $x > \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$ un point de continuité de F. Il existe alors une extraction ϕ telle que $x \geq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $F_{\phi(n)}(x) \geq u$ et en passant à la limite on obtient $F(x) \geq u$, et donc $x \geq F^{-1}(u)$. Ceci montre que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$.

(3) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. On pose $X' = F^{-1}(U)$ et $X'_n = F_n^{-1}(U)$. D'après la feuille d'exercices 1, $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$ et $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$. D'après la question précédente, $X'_n(\omega) \to X'(\omega)$ si F^{-1} est continue en $U(\omega)$. Puisque F^{-1} a un nombre au plus dénombrable de discontinuités, il s'ensuit que F^{-1} est presque sûrement continue en U et le résultat désiré en découle.

* * *

Solution de l'exercice 2.5.

(1) L'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ est claire car $|m_k| \leq M_k$. Pour l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$, l'idée est de montrer que les rayons de convergence de

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$$

sont non nuls. Pour le premier, ceci provient du fait que $m_k = M_k$ pour k pair, et pour le second de l'inégalité $|x|^{2j-1} \leq 1 + x^{2j}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j \geq 1$.

(2) La formule de Taylor reste intégral donne pour $h \in \mathbb{R}$ et $K \geq 1$:

$$e^{ih} = \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} + \frac{(ih)^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K e^{iuh} \mathrm{d}u,$$

de sorte que

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K \mathrm{d}u = \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) D'après la question précédente, on peut écrire

$$e^{i(t+h)x} = \sum_{k=0}^{K} \frac{(ihx)^k}{k!} e^{itx} + R_K(x,h)$$

avec $|R_K(x,h)| \leq \frac{|hx|^{K+1}}{(K+1)!}$. En particulier,

$$\phi(t+h) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\right]}{k!} h^k + \mathbb{E}\left[R_K(X,h)\right]$$

Or $\phi^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\right]$, et par définition de R, si $|h| < R$, $\frac{|h|^{K+1} M_{K+1}}{(K+1)!} \to 0$, et le résultat s'ensuit.

(4) Puisque ϕ caractérise la loi de X, il suffit de montrer que ϕ s'exprime à partir des moments de X. D'après la question précédente, en prenant $t = 0$, ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $]-R,R[$. Puis, en redéveloppant en série entière autour de points proches de R et de $-R$, on en déduit que ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $]-2R,2R[$, et ensuite sur $]-nR,nR[$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence, d'où le résultat.

Remarque. Il est possible de trouver des variables aléatoires X et Y, admettant des moments de tout ordre, telles que $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \mathbb{E}\left[Y^k\right]$ pour tout $k \geq 1$ mais telles que leurs lois ne sont pas les mêmes. Un exemple explicite est donné par les densités

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0} \quad \text{et} \quad (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0}.$$

* * *

Solution de l'exercice 2.6. Rappelons que ϕ a été construit en posant

$$\phi(x) = \sum_{m \geq 1} (x - x_m)_+$$

avec $(x_m)_{m \geq 1}$ une suite strictement croissante telle que $\sup_{i \in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \geq x_m}\right] \leq 2^{-m}$.

Remarquons que ϕ est dérivable sauf en un nombre dénombrable de points, et alors

$$\phi'(x) = \#\{m \geq 1 : x_m \leq x\}.$$

En particulier,

$$\phi'(2x) = \phi'(x) + \#\{m \geq 1 : x < x_m \leq 2x\}$$

Ainsi, en prenant $x_1 = 1/2$ et en choisissant les (x_m) de sorte que $x_{m+1} > 2x_m$, on obtient pour $x \geq 1/2$:

$$\phi'(2x) \leq \phi'(x) + 1 \leq 2\phi'(x).$$

Ainsi, pour $x \geq 1$,

$$\phi(x) \leq \int_0^x 2\phi'(u/2) du = 4\phi(x/2).$$

En posant $k = \lceil \log_2(x) \rceil$, on obtient

$$\phi(x) \leq 4^k \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq 4^{1+\ln(x)/\ln(2)} \phi(1) \leq Cx^2$$

avec $C = 4\phi(1)$. Le résultat s'ensuit en prenant $\phi/(4\phi(1))$.

* * *

Solution de l'exercice 2.7. Pour les deux questions on utilise la caractérisation "ε-δ" de l'uniforme intégrabilité. Tout d'abord, puisque $(X_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable, elle est bornée dans L^1 : il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X_n|] \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Aussi, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a $\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Par inégalité triangulaire et linéarité de l'espérance, pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq C$ et pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a

$$\mathbb{E}[|S_n| \mathbb{1}_A] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Il suffit de montrer que si $X_n \to X$ dans L^1 alors $\mathbb{E}[|X|] \leq C$ et pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a $\mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$. La première inégalité provient du fait que $|X_n| \to |X|$ dans L^1 (car $||X_n| - |X|| \leq |X_n - X|$) et que la convergence dans L^1 implique la convergence des espérances. De même, pour la seconde inégalité on utilise le fait que $X_n \mathbb{1}_A \to X \mathbb{1}_A$ dans L^1 car $|X_n \mathbb{1}_A - X \mathbb{1}_A| \leq |X_n - X|$.

* * *

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Solution de l'exercice 2.8. La variable aléatoire X est presque sûrement constante. En effet, notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Vérifions d'abord que $\mathrm{Card}(A) \leq 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x \neq y$ sont deux valeurs d'adhérence de cette suite. Soit alors $\varepsilon < d(x,y)/3$. D'après le théorème de porte-manteau,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{x_n \in \overline{B}(x,\varepsilon)} \leq \mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right),$$

de sorte que $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right) = 1$. De même, $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(y,\varepsilon)\right) = 1$. Absurde car $\overline{B}(x,\varepsilon) \cap \overline{B}(y,\varepsilon) = \emptyset$.

Considérons

$$F = \{x_n : n \geq 1\} \cup A,$$

qui est fermé.

Si $A = \emptyset$, d'après le théorème de porte-manteau, comme précédemment, $\mathbb{P}(X \in F) = 1$. Puisque $A = \emptyset$, pour tout $i \geq 1$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $x_n \notin B(x_i, \varepsilon_i)$ pour n assez grand. D'après le théorème de porte-manteau on a alors $\mathbb{P}(X \in B(x_i,\varepsilon_i)) = 0$ pour tout $i \geq 1$, ce qui contredit $\mathbb{P}(X \in \{x_n : n \geq 1\}) = 1$.

Si $A = \{x\}$, d'après le théorème de Porte-manteau, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right) = 1$, et on en déduit que $\mathbb{P}(X = x) = 1$.

***

Solution de l'exercice 2.9. C'est vrai pour des modes de convergence dont la convergence est définie à travers une distance : ainsi c'est vrai pour la convergence L^p, la convergence en loi et la convergence en probabilité $X_n \to X$ en probabilité ssi $\mathbb{E}[\min(d(X_n,X),1)] \to 0$.

En revanche, c'est faux pour la convergence p.s. Par exemple si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes telle que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n$, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ prend p.s. une infinité de fois les valeurs 0 et 1 par Borel-Cantelli, mais il est clair que de toute sous-suite ϕ en ré-extrayant ψ de sorte que $\phi \circ \psi(n) \geq n^2$, la suite $(X_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

***

Solution de l'exercice 2.10. Il suffit de montrer que (X_n) est uniformément intégrable. À cet effet, on écrit pour $A > 0$:

$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n \geq A}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{Y_n \geq A}\right],$$

d'où

$$\limsup_{A\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n \geq A}\right] \leq \limsup_{A\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{Y_n \geq A}\right] = 0,$$

car Y_n converge dans L^1 et donc est uniformément intégrable.

***

Solution de l'exercice 2.11. *Première solution.* On utilise la caractérisation $\varepsilon - \delta$ de l'uniforme continuité. Tout d'abord la famille $(XY_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^1, puisqu'en vertu de l'inégalité de Holder :

$$\mathbb{E}[|XY_i|] \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}\, \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p}$$

et que $(Y_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^p.

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $X^q \in L^1$, la famille $\{X^q\}$ est intégrable. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ implique $\mathbb{E}[X^q \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon^q / C^q$ où $C = \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p}$. Par inégalité de Holder on a alors pour tout $i \in I$:

$$\mathbb{E}[|XY_i| \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X|^q \mathbb{1}_{\mathbb{A}}]^{1/q} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Deuxième solution. Soit $i \in I$. On commence par utiliser l'inégalité $ab \leq a^p/p + b^q/q$ pour $a, b \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|XY_i| \mathbb{1}_{|XY_i|>A}] &\leq \mathbb{E}[|XY_i| \mathbb{1}_{|X|^q/q + |Y_i|^p/p > A}] \\ &\leq \mathbb{E}[|XY_i| (\mathbb{1}_{|X|^q/q > A/2} + \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2})] \\ &= \mathbb{E}[|Y_i||X| \mathbb{1}_{|X|^q/q > A/2}] + \mathbb{E}[|X||Y_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}] \end{aligned}$$

Pour contrôler le premier terme, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}[|Y_i||X| \mathbb{1}_{|X|^q/q > A/2}] \leq \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} \mathbb{E}\left[|X|^q \mathbb{1}_{|X|^q/q > A/2}\right]^{1/q}.$$

Le premier terme est borné uniformément en i et le deuxième terme tend vers 0 par convergence dominée car $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le contrôle de $\mathbb{E}[|X||Y_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}]$ est un peu plus délicat. Pour $R > 0$ on écrit en utilisant l'inégalité d'Hölder

$$\mathbb{E}(|XY_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}) \leq R\mathbb{E}(|Y_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}) + \mathbb{E}(|XY_i| \mathbb{1}_{|X|>R}) \leq R\mathbb{E}(|Y_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}) + \|X \mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \|Y_i\|_p.$$

Puisque la famille $(Y_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable et bornée dans L^p, on a

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}(|XY_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2}) \leq R \underbrace{\sup_{i \in I} \mathbb{E}(|Y_i| \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p > A/2})}_{\to 0 \text{ quand } A \to \infty} + \|X \mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \underbrace{\sup_{i \in I} \|Y_i\|_p}_{<\infty}.$$

Enfin, comme précédemment,

$$\|X \mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \quad \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

par convergence dominée. Ceci conclut.

* * *

Solution de l'exercice 2.12. La réponse est oui. En calculant par exemple sa fonction de répartition, on vérifie que $\ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ, de sorte que T_n converge presque sûrement vers $e^{1/\lambda}$ par la loi forte des grands nombres.

Par ailleurs, $(T_n)_{n \geq 1}$ est borné dans L^2 car pour n assez grand

$$\mathbb{E}[T_n^2] = \mathbb{E}\left[X^{2/n}\right]^n = \left(\int_1^\infty x^{2/n} \cdot \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathrm{d}x\right)^n = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n - 2}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{\lambda n - 2}\right)^n$$

qui converge vers $e^{2/\lambda}$.

Donc T_n est uniformément intégrable, et convergeant p.s. (et donc en probabilité), elle converge dans L^1.

Autres solutions. Alternativement, on peut passer par le lemme de Scheffé, ou montrer que $\mathbb{E}[T_n] \to e^{1/\lambda}$ et $\mathbb{E}[T_n^2] \to e^{2/\lambda}$ et conclure par Cauchy-Schwarz.

***

Solution de l'exercice 2.13.

(1) La suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ étant bornée dans L^1, elle est tendue. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est également tendue (d'après le théorème de Prokhorov, puisqu'elle converge en loi). La suite de variables aléatoires $((X_n, Y_n))_{n\geq 1}$ est donc tendue. Il existe ainsi une extraction φ et une variable aléatoire (U, V) telle que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)}) \to (U, V)$ en loi, avec $U = X$ en loi. D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que cette convergence a lieu p.s. On a également $X_{\varphi(n)} \leq Y_{\varphi(n)}$ p.s. (c'est une propriété qui ne dépend que de la loi de $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$). En particulier, $U \leq V$ p.s. D'après le lemme de Fatou, on a $\mathbb{E}[V] \leq 1$, et comme $\mathbb{E}[U] = 1$, on en déduit que $\mathbb{E}[V] = 1$. Donc $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V]$ avec $U \leq V$ p.s., ce qui entraîne $U = V$ p.s.

Autre solution (mais qui ne montre pas que $\mathbb{E}[Y_n] \to 1$). Par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(|Y_n - X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[Y_n - X_n] \to 0$, donc $Y_n - X_n$ tend en probabilité vers 0. D'après le lemme de Slutsky, $(Y_n - X_n, X_n) \to (0, X)$ en loi, et donc par continuité de $(a, b) \mapsto (a, a + b)$ on a bien la convergence en loi de (Y_n, X_n) vers (X, X).

(2) D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que Y_n converge p.s. vers X. Comme $\mathbb{E}[Y_n] \to 1 = \mathbb{E}[X]$ (d'après la preuve de (1)), le lemme de Scheffé entraîne que $Y_n \to X$ dans L^1, ce qui implique par résultat du cours que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

***

Solution de l'exercice 2.14. Dans les deux cas, montrons d'abord que X_n converge en probabilité vers α (en posant $\alpha = 1$ dans la première question).

Cas (1) : on a

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(1 - X_n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \mathbb{E}[X_n]) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Cas (2) : on a

$$\mathbb{P}(|X_n - \alpha| > \varepsilon) = \mathbb{P}((X_n - \alpha)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - \alpha)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}[X_n^2] - 2\alpha\mathbb{E}[X_n] + \alpha^2}{\varepsilon^2} \to \frac{\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2}{\varepsilon^2} = 0.$$

Pour conclure, on remarque que la suite $(\mathbb{E}[|X_n - \alpha|^p])_{n\geq 1}$ est bornée ; il suffit de montrer que 0 est sa seule valeur d'adhérence. Soit ϕ extraction telle que $(\mathbb{E}\left[|X_{\phi(n)} - \alpha|^p\right])_{n\geq 1}$ converge. Puisque X_n converge en probabilité vers α, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers 0. Par convergence dominée, $(\mathbb{E}\left[|X_{\phi\circ\psi(n)} - \alpha|^p\right])_{n\geq 1}$ converge vers 0, ce qui conclut. Alternativement, on peut utiliser le théorème de super convergence dominée en remarquant que $|X_n - 1|^p$ est uniformément intégrable car bornée.

***

Solution de l'exercice 2.15.

(1) Vrai d'après le lemme de Césaro.

(2) Vrai, en écrivant par exemple

$$\mathbb{E}[|S_n - X|] \leq \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k - X|]}{n}$$

et en utilisant le lemme de Césaro.

(3) Faux, par exemple si $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n=n)=\frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n=0)=1-1/n$. Alors $X_n\to 0$ en probabilité. Vérifions que $S_n \not\to 0$ en probabilité. Pour $\varepsilon\in]0,1/2[$, on remarque que

$$\mathbb{P}(S_{2n}\geq\varepsilon)\geq\mathbb{P}(\exists k\in\{n,n+1,\dots,2n\}:X_k=k).$$

Mais

$$\mathbb{P}(\exists k\in\{n,n+1,\dots,2n\}:X_k=k)=1-\exp\left(\sum_{i=n}^{2n}\ln\left(1-\frac{1}{i}\right)\right)\quad\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(S_{2n}\geq\varepsilon)\not\to 0$.

(4) Faux, en prenant par exemple $X_{2n}=-X_{2n+1}=N$ avec N une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

* * *

Solution de l'exercice 2.16.

(1) Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. Soit $\varepsilon>0$ et soit $E_n=\{|f_n(Y_n)-1|<\varepsilon\}$. Alors

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[F(Y_n)]| &\leq \mathbb{E}\Big[|F(X_n)-F(Y_n)|\mathbb{1}_{E_n^c}\Big]+\mathbb{E}\Big[|f_n(Y_n)-1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\Big]\\ &\leq 2\|F\|_\infty\mathbb{P}(E_n^c)+\mathbb{E}\Big[|f_n(Y_n)-1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\Big]\\ &\leq 2\|F\|_\infty\mathbb{P}(E_n^c)+\varepsilon\|F\|_\infty\end{aligned}$$

ce qui montre que $\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[F(Y_n)]|=0$. Comme $\mathbb{E}[F(Y_n)]\to\mathbb{E}[F(Y)]$, il s'ensuit que $\mathbb{E}[F(X_n)]\to\mathbb{E}[F(Y)]$.

Autre solution. On montre que pour tout F fermé

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\in F)\leq\mathbb{P}(Y\in F).$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n\in F) &\leq \mathbb{P}(|f_n(Y_n)-1|>\varepsilon)+\mathbb{P}(X_n\in F,|f_n(Y_n)-1|\leq\varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(|f_n(Y_n)-1|>\varepsilon)+\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{Y_n\in F,|f_n(Y_n)-1|\leq\varepsilon}f_n(Y_n)\Big]\\ &\leq \mathbb{P}(|f_n(Y_n)-1|>\varepsilon)+(1+\varepsilon)\mathbb{P}(Y_n\in F)\\ &\leq \varepsilon+(1+\varepsilon)\mathbb{P}(Y_n\in F)\end{aligned}$$

pour n assez grand, ce qui conclut.

Autre solution. Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\mathbb{E}[F(Y_n)]\to\mathbb{E}[F(Y)]$, il suffit de montrer que $|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[F(Y_n)]|\to 0$. Pour cela, on écrit

$$|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[F(Y_n)]|\leq\mathbb{E}\Big[|f_n(Y_n)-1|F(Y_n)\mathbb{1}_{E_n}\Big]+\|F\|_\infty\mathbb{E}[]\leq\|F\|_\infty\mathbb{E}[|f_n(Y_n)-1|].$$

Il suffit donc de démontrer que $f_n(Y_n)\to 1$ dans L^1. Ceci provient du théorème de représentation de Skorokhod, combiné avec le lemme de Scheffé car $\mathbb{E}[f_n(Y_n)]=1$.

(2) Tout d'abord, f est continue comme limite uniforme de fonctions conitnues. Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. On montre que
$$\mathbb{E}[F(X_n)] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(Y)F(Y)],$$
ce qui montrera que X_n converge en loi vers une variable aléatoire absolument continue par rapport à la loi de Y de densité f.

Soit $M>0$ tel que $\mathbb{P}(|Y|\neq M)=1$ (on rappelle que le complémentaire de l'ensemble de ces M est dénombrable). On écrit
$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right]=\mathbb{E}\left[f_n(Y_n)F(Y_n)\mathbb{1}_{|Y_n|\leq M}\right].$$
Par hypothèse, $f_n(Y_n)F(Y_n)\mathbb{1}_{|Y_n|\leq M}$ converge presque sûrement vers $f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}$. Par ailleurs, puisque f est bornée sur tout compact, cette suite est bornée. On peut donc applique le théorème de convergence dominée et obtenir
$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}\right].$$
Ainsi, en prenant $F=1$ et en utilisant le fait que $\mathbb{E}[f(Y)]=1$, on obtient
$$\mathbb{P}(|X_n|\geq M) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left[f(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right].$$
Enfin,
$$|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[f(Y)F(Y)]|\leq |\mathbb{E}\left[F(X_n)\mathbb{1}_{|X_n|\leq M}\right]-\mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq M}\right]|+\mathbb{P}(|X_n|\geq M)+\mathbb{E}\left[f(Y)F(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right],$$
de sorte que
$$\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{E}[F(X_n)]-\mathbb{E}[f(Y)F(Y)]|\leq (1+\|F\|_\infty\mathbb{E}\left[f(Y)\mathbb{1}_{|Y|>M}\right],$$
dont la limsup en $M\to\infty$ tend vers 0, ce qui donne le résultat désiré.

* * *

Solution de l'exercice 2.17. Par hypothèse, pour tout $k\geq 1$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n_0\geq 1}\bigcap_{n\geq n_0}\{X_k^n=X_k\}\right)=1.$$
L'union en n_0 étant croissante, on a donc $\mathbb{P}\left(X_k^n=X_k\right)\to 1$ lorsque $n\to\infty$, et ce pour tout $k\geq 1$.

Il existe donc une suite $(i_M)_{M\geq 1}$ d'entiers qu'on peut supposer strictement croissante telle que pour tout $M\geq 1$ et $n\geq i_M$ on a
$$\sum_{k=1}^{M}\mathbb{P}\left(X_k^n\neq k\right)\leq \frac{1}{M}.$$
Pour tout $n\geq 1$, on pose alors $A_n=M$ si $i_M\leq n<i_{M+1}$. Vérifions que cette suite convient. Tout d'abord, on a clairement $A_n\to\infty$. On écrit
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{\text{pour tout } k\in\{1,2,\ldots,A_n\} \text{ on a } X_k^n=X_k\}^c\right) &\leq \sum_{k=1}^{A_n}\mathbb{P}\left(X_k^n\neq X_k\right)\\ &\leq \frac{1}{A_n},\end{aligned}$$
qui tend vers 0.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

***

3 Mesures de probabilité sur un espace métrique

3.1 Exercices

Exercice 3.1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tels que $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \delta_x$.

* * *

Exercice 3.2. Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ un élément fixe et $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que $X_n \Rightarrow x$ si et seulement si $X_n \to x$ en probabilité.

* * *

Exercice 3.3. – (Lemme de Slutsky) – Soient E et F deux espaces métriques séparables, $y \in F$ un élement fixé, $X, X_1, X_2, \ldots$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans respectivement E et F telles que $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow y$. Montrer que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$.

* * *

Exercice 3.4. – (Produits dénombrables d'espaces métriques) – Soit $((E_i, d_i))_{i\geq 1}$ une suite d'espaces métriques séparables. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$ et

$$\forall x = (x_i)_{i\geq 1}, y = (y_i)_{i\geq 1} \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

(1) Montrer que (E,d) est séparable.

(2) Montrer qu'une suite $(x^n)_{n\geq 1} \in E$ converge vers $x \in E$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, $x^n_k \to x_k$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Montrer que (E,d) est complet si tous les E_i le sont.

(4) Montrer que (E,d) est compact si tous les E_i le sont.

* * *

Exercice 3.5. – (Un exemple d'espace métrique non séparable) – Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme n'est pas séparable.

* * *

Exercice 3.6. – (Principe des lois accompagnantes) – Sur un même espace de probabilités, on suppose donnée une famille de variables aléatoires $(Y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1)$ ainsi que d'une autre suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$, toutes étant à valeurs dans le même espace métrique (E,d).

On suppose que pour tout $k \geq 1$, la suite $(Y_{n,k}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite Y_k. Enfin, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(1) On suppose que $Y_k \Rightarrow Y$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que $X_n \Rightarrow Y$.

(2) On suppose que (E,d) est séparable et complet. Montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ converge en loi.

On pourra utiliser avec profit la distance de Lévy–Prokhorov.

* * *

Exercice 3.7. Soit (E,d) un espace métrique complet et $A \subset E$. Montrer que A est précompact si, et seulement si, A est relativement compact.

* * *

Exercice 3.8. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$ et $X_n \geq 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

* * *

Exercice 3.9. Soit (E,d) un espace métrique séparable.

(1) Montrer que l'application $F : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de E sur $E_0 := \{\delta_y : y \in E\}$, où ce dernier est vu comme sous-espace de $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la convergence étroite.

Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ. On suppose par l'absurde que $(x_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

(2) Montrer que $\{x_n, n \geq 1\}$ est un fermé, ainsi que toutes ses parties (finies ou infinies). Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de μ_n. En déduire que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}_1(E)$.

(3) En déduire que si $\mathcal{M}_1(E)$ est compact, alors E est compact.

* * *

Exercice 3.10. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite d'espaces polonais. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$, muni de la même distance d que dans la feuille d'exercices 2 :

$$\forall x,y \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}.$$

Montrer qu'une famille $\Gamma \subset \mathcal{M}_1(E)$ est tendue si et seulement si pour tout $i \geq 1$, $\{\pi_i\mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendu, où $\pi_i : E \to E_i$ est la projection canonique et $\pi_i\mu$ la mesure image de μ par π_i.

* * *

Exercice 3.11. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On voit A comme un espace métrique muni de la distance d.

(1) Montrer que les ouverts de (A,d) sont de la forme $A \cap O$ avec O ouvert de (E,d).

(2) Montrer que les éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$ sont de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$.

(3) Soit $K \subset A$ un compact de (A,d). Montrer que K est fermé dans E.

* * *

Exercice 3.12. Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui métrise la convergence presque partout (on pourra montrer l'existence d'une suite de fonctions qui ne converge pas presque sûrement, mais telle que de toute sous-suite on peut ré-extraire une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers 0).

* * *

Exercice 3.13. Soit (E,d) un espace métrique.

(1) On suppose que E est séparable. Montrer que tout ouvert de E est union dénombrable de boules ouvertes.

(2–★) La réciproque est-elle vraie ?

* * *

Exercice 3.14. Soit (E,d) un espace métrique séparable et complet. Soit $I : E \to [0,\infty]$ une fonction telle que pour tout $c \in [0,\infty[$, $\{x \in E : I(x) \leq c\}$ est compact. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$. On considère les propriétés (A), (B) et (C) suivantes :

(A) pour tout fermé F de E on a $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$.

(B) pour tout compact K de E on a $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(K) \leq -\inf_{x\in K} I(x)$.

(C) pour tout $M \geq 0$ il existe un compact K_M de E tel que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E\backslash K_M) \leq -M$.

(1) Démontrer que (C) et (B) impliquent (A).

(2) Démontrer que (A) implique (C).

* * *

Exercice 3.15. Soit $d \geq 1$ un entier. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ des mesures de probabilité de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ de la forme $P_{(X,Y)}$ où X et Y sont des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité avec X ayant loi μ et Y ayant loi ν est compact dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ muni de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP} (ici on note P_U pour la loi d'une variable aléatoire U).

(2) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$. Démontrer que l'infimum

$$I = \inf\{\mathbb{E}[|X-Y|] : X \text{ a pour loi } \mu \text{ et } Y \text{ a pour loi } \nu\}$$

est atteint.

* * *

Exercice 3.16. Soit (E,d) un espace métrique séparable. Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable H de fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(E)$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in H$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

***

Exercice 3.17. Pour $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\sup(x) = \sup_{i \geq 1} x_i$.

(1) Soit $X, X^1, X^2, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (muni de la tribu et de la distance définies dans le cours 2) telles que $X^n \Rightarrow X$. Alexandra dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

(2) On considère $\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$, muni de la distance $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$ et de la tribu borélienne associée. Soit $X, X^1, X^2, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans ℓ^1 telles que $X^n \Rightarrow X$. Béatrice dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

***

Exercice 3.18. Soit (E,d) un espace métrique et notons d_{LP} la distance de Lévy-Prokhorov sur E.

(1) Montrer que

$$d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{r > 0 : \forall F \text{ fermé de } E, \mu(F) \leq \nu(F^r) + r\}$$

où $F^r = \{x \in E : d(x,F) < r\}$.

(2) Que se passe-t-il si on remplace "fermé" par "ouvert" ? Autrement dit, a-t-on

$$d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{r > 0 : \forall O \text{ ouvert de } E, \mu(O) \leq \nu(O^r) + r\}?$$

***

Exercice 3.19. Soit μ une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique (E,d). Montrer qu'il existe un borélien $A \subset E$ avec (A,d) séparable et $\mu(A) = 1$.

***

Exercice 3.20. Considérons une suite $(E_n, d_n)_{n\geq 1}$ d'espaces métriques munis de leurs tribus boréliennes. Pour tout $n \geq 1$, soit μ_n une mesure de probabilité sur E_n, et $(X_n(k))_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans E_n de loi μ_n.

On note $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} = \{(a_{i,j})_{i,j\geq 1} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ pour } i,j \geq 1\}$ l'ensemble des matrices réelles "infinies", muni de la distance

$$d\Big((a_{i,j})_{i,j\geq 1}, (b_{i,j})_{i,j\geq 1}\Big) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|a_{i,j} - b_{i,j}|}{|a_{i,j} - b_{i,j}| + 1} \times \frac{1}{2^{i+j}}$$

et de sa tribu borélienne associée.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\Big((d_n(X_n(i), X_n(j))_{i,j\geq 1}\Big)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R})$;

(ii) la suite $(d_n(X_n(1), X_n(2)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$;

(iii) pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in E_n$ tel que la suite $(d_n(x_n, X_n(1)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$.

***

Exercice 3.21. Soit (E,d) une espace métrique et (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur E. On suppose que pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ la suite $(\int f \, d\mu_n)_{n\geq 1}$ converge.

(1) On suppose que E est compact. Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

(2) (*) On suppose que E est polonais. Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

* * *

Exercice 3.22. Soit E un espace vectoriel normé séparable, $n \geq 2$ un entier et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables i.i.d.

(1) On suppose que la v.a. X_1 est tendue. Montrer que la v.a. $X_1 + \cdots + X_n$ est tendue.

(2) La réciproque est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

* * *

Exercice 3.23. Soit (E,d) un espace métrique polonais. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des mesures de probabilité sur E de la distance de Lévy-Prokhorov $\mathrm{d_{LP}}$. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$.

(1) Soit M une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathrm{d_{LP}}(M_n, M) \to 0$ en probabilité.

(b) pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}M$ en probabilité.

(c) pour tout extraction φ il existe un extraction ψ telle que presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers M dans $(\mathcal{M}_1(E), \mathrm{d_{LP}})$.

On pourra utiliser le fait suivant (porisme de la preuve du deuxième point de la dernière proposition dans les compléments du cours 3) : il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \dots, f_K \in \mathcal{F}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(\mu, \varepsilon),$$

où $B(\mu,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{M}_1(E)$ centrée en μ et de rayon ε pour $\mathrm{d_{LP}}$.

(2) Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ une mesure de probabilité (déterministe). Conditionnellement à M_n, soient Π^1_n et Π^2_n deux variables aléatoires indépendantes de loi M_n (c'est-à-dire que $\mathbb{E}[f(\Pi^1_n)|M_n] = \int_E f \mathrm{d}M_n$ pour toute fonction mesurable positive f). On suppose que (Π^1_n, Π^2_n) converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers (Π^1, Π^2), où Π^1 et Π^2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi μ. Démontrer que $\mathrm{d_{LP}}(M_n, \mu) \to 0$ en probabilité.

* * *

Exercice 3.24. Soit (E,d) un espace métrique séparable et X_n, Y_n des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose que X_n converge presque sûrement et que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) \to 0$.

(1) Montrer que Y_n converge en probabilité.

(2) Est-il vrai que Y_n converge presque sûrement ? Justifiez votre réponse (si la réponse est oui, donnez une preuve ; si la réponse est non, donnez un contre-exemple avec l'espace E de votre choix).

* * *

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Problème 3.25.

(1) Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable D de fonctions lipschitziennes à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in D$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

(2) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne à support compact peut s'écrire comme la différence de deux fonctions lipschitziennes croissantes bornées.

Indication. On pourra considérer pour $a < b$ la fonction

$$g(a,b) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : n \geq 1, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b \right\}.$$

(3) Soit Z une variable aléatoire réelle à densité. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de même loi que Z et P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{R}[X]$. On note $(Y_i^n)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{Y_i^n}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

(4) Soit $\mathcal{E} = \{a_1, \ldots, a_K\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble **fini**. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{E}$. Soit P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{C}[X]$. On note $(Y_i^n)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines complexes de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{Y_i^n}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

* * *

Problème 3.26. On considère $\mathbb{U} = \cup_{n=0}^{\infty}(\mathbb{N}^*)^n$, où $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\varnothing\}$ par convention. Un élément $u \in \mathbb{U}$ est ainsi une suite finie d'entiers strictement positifs, appelé aussi mot. Si $u \in (\mathbb{N}^*)^n$, on note $|u| = n$ sa longueur. On définit $\partial\mathbb{U} = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ et on pose $\overline{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \cup \partial\mathbb{U}$. Pour $u \in \mathbb{U}$ et $v \in \overline{\mathbb{U}}$, on note uv la concaténation de u et de v (en particulier $\varnothing u = u\varnothing$ pour tout mot u), et on note $u \preceq uv$.

Pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ avec $u \neq v$, on note $u \wedge v \in \mathbb{U}$ le plus long mot pour lequel il existe $x, y \in \overline{\mathbb{U}}$ tels que $u = (u \wedge v)x$ et $v = (u \wedge v)y$. On pose enfin $u \wedge u = u$.

(1) On définit pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$:

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v, \\ e^{-|u\wedge v|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur $\overline{\mathbb{U}}$ qui vérifie $d(u,w) \leq \max(d(u,v), d(v,w))$ pour tous $u, v, w \in \overline{\mathbb{U}}$ et qui rend cet espace polonais.

(2) Montrer que dans $\overline{\mathbb{U}}$ les boules ouvertes sont fermées.

(3) Pour $u \in \mathbb{U}$, on note $T(u) = \{uv : v \in \overline{\mathbb{U}}\}$. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesure de probabilités sur $\overline{\mathbb{U}}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que $(\mu)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité μ sur $\overline{\mathbb{U}}$ si et seulement si pour tout $u \in \mathbb{U}$,

$$\mu_n(\{u\}) \to \mu(\{u\}) \qquad \text{et} \qquad \mu_n(T(u)) \to \mu(T(u)).$$

* * *

Problème 3.27. Soit (E, d) un espace métrique séparable. On munit $\mathcal{M}_1(E)$ de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP}.

On pourra utiliser le fait suivant (démontré dans les compléments du cours 3) : pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(\mu, \varepsilon),$$

où $B(\mu, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{M}_1(E)$ centrée en μ et de rayon ε pour d_{LP}.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ une mesure de probabilité (déterministe) fixée, et $(M_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$.

Première partie.

(1) Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

(b) M_n converge en loi vers μ (vue comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$) ;

(c) M_n converge en probabilité vers μ (vue comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$) ;

(d) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int f \mathrm{d}\mu$;

(e) lorsque $E = \mathbb{R}$, en notant $\Phi_n(t) = \int e^{\mathrm{i}tx} M_n(\mathrm{d}x)$ et $\Phi(t) = \int e^{\mathrm{i}tx} \mu(\mathrm{d}x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\sup_{|t| \leq \delta} |\Phi_n(t) - \Phi(t)|$ converge en probabilité vers 0 et $\Phi_n(t)$ converge en probabilité vers $\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$ et que μ est caractérisée par ses moments.

(a) On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\int x^k \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$. Montrer que M_n converge en loi vers μ.

(b) On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}\left[\int x^k \mathrm{d}M_n\right]$ converge vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$ et que $\mathrm{Var}(\int x^k \mathrm{d}M_n) \to 0$. Montrer que M_n converge en loi vers μ.

Deuxième partie. On suppose dans la suite que les variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$ sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(3) Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour presque tout $\omega \in \Omega$, M_n converge étoitement vers μ ;

(b) pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$;

(c) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$;

(d) lorsque $E = \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a presque sûrement $\int e^{itx} \mathrm{d}M_n(\mathrm{d}x) \to \int e^{itx} \mu(\mathrm{d}x)$.

(4) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$ et que μ est caractérisée par ses moments. On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\int x^k \mathrm{d}M_n$ converge pour presque tout $\omega \in \Omega$ vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$. Montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega$, M_n converge étroitement vers μ.

(5) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ. Que dire du comportement, lorsque $n \to \infty$, de $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}$?

***

Problème 3.28. Soit (E,d) un espace métrique **compact** muni de sa tribu borélienne. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Pour $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$I_\mu(\varepsilon) = \inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x,\varepsilon)),$$

où $\overline{B}(x,\varepsilon) = \{y \in E : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ désigne la boule fermée de rayon ε centrée en x.

Première partie.

(1) Calculer $\lim_{M\to\infty} I_\mu(M)$.

(2) Montrer que I_μ est càdlàg.

(3) Montrer que si pour tout $x \in E$ on a $\mu(\{x\}) = 0$, alors $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) = 0$.

(4) Camille dit : « La réciproque de l'énoncé de la question (3) est aussi vraie. ». A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$.

(5) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\limsup_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon).$$

On dit qu'une mesure de probabilité sur E est *de support plein* si la masse qu'elle donne à tout ouvert est strictement positive.

(6) On suppose que μ_n converge étroitement vers μ. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) μ est de support plein ;

   (b) $I_\mu(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$;

   (c) $\liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Troisième partie. On suppose dans la suite que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ et que M est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

(7) On suppose que M_n converge en loi vers M. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) M est presque sûrement de support plein ;

   (b) pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ il existe $\delta, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}\left(I_{M_n}(\varepsilon) < \delta\right) < \varepsilon'.$$

(8) Dominique dit : « M_n converge en loi vers M si et seulement si sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$, I_{M_n} converge en loi vers I_M pour la topologie de Skorokhod. » A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

* * *

3.2 Solutions

Solution de l'exercice 3.1. Tout d'abord, la suite (x_n) est bornée. En effet, sinon, il existe une extraction ϕ telle que $|x_{\phi(n)}| \to \infty$. Par portemanteau, pour tout $A > 0$, on a alors $0 = \liminf_{n\to\infty} \delta_{x_{\phi(n)}}(]-A,A[) \geq \mu(]-A,A[)$ et donc $\mu(]-A,A[) = 0$ pour tout $A > 0$, absurde.

Vérifions que (x_n) a une seule valeur d'adhérence. Si $x_{\phi(n)} \to x$, alors par portemanteau pour tout $\epsilon > 0$, $1 = \limsup_{n\to\infty} \delta_{x_{\phi(n)}}([x-\epsilon, x+\epsilon[) \leq \mu([x-\epsilon, x+\epsilon])$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\mu(\{x\}) = 1$. Puisqu'il ne peut pas y avoir $x \neq y$ tels que $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\}) = 1$, ceci montre que $\mu = \delta_x$ où x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 1}$.

***

Solution de l'exercice 3.2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est une conséquence de l'exercice 2.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour $\varepsilon > 0$, en notant $B(x,\varepsilon)$ la boule ouverte centrée en x de rayon ε, de sorte que son complémentaire est fermé, par porte-manteau :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \notin B(x,\varepsilon)) \leq \mathbb{P}(x \notin B(x,\varepsilon)) = 0.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, x) \geq \varepsilon) \to 0$, donc $X_n \to x$ en probabilité.

***

Solution de l'exercice 3.3. Par hypothèse, $(X_n, y) \Rightarrow (X, y)$. En notant $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_E(x_1,x_2) + d_F(y_1,y_2)$, par hypothèse $d((X_n,y),(X_n,Y_n) = d_F(Y_n,y) \to 0$ en probabilité. Il s'ensuite que $(X_n,Y_n) \Rightarrow (X,y)$ d'après un résultat du cours.

***

Solution de l'exercice 3.4. Tout d'abord, on vérifie sans difficultés que d est une distance et que pour tous $N \geq 1, x, y \in E$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \leq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

(1) Soit D_i un ensemble dénombrable dense de E_i et $a_i \in E_i$ un élément fixé de E_i. On note D l'ensemble des suites qui s'écrivent sous la forme $(x_1, \ldots, x_K, a_{K+1}, \ldots)$ avec $K \geq 1$ un entier, $x_1, \in D_1, \ldots, x_K \in D_K$. Soit $\varepsilon > 0$ et $y = (y_1, y_2, \ldots) \in E$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un élément $x = (x_1, \ldots, x_N, a_{K+1}, \ldots) \in D$ tel que $d_i(x_i, y_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On a alors $d(x,y) \leq 2\varepsilon$.

(2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication provient immédiatement du fait que si $x = (x_1, x_2, \ldots)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots)$, alors $d_i(x_i, y_i) \leq d(x,y)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $x_k^n \to x_k$ pour tout $k \geq 1$ lorsque $n \to \infty$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $d_i(x_i^n, x_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors $d(x^n, x) \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$.

(3) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de (E,d). Alors pour tout $k \geq i$, $(x_i^n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans (E_i, d_i), donc converge vers un élément noté x_i. On en déduit que $x^n \to (x_1, x_2, \ldots)$ d'après la question précédente.

 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

(4) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite de (E,d). Pour $i \geq 1$, chaque suite $(x_i^n)_{n\geq 1}$ étant à valeurs dans E_i, elle admet une valeur d'adhérence. Par procédé diagonal, il existe une extraction ϕ telle que $(x_i^{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge pour tout $i \geq 1$ vers une valeur notée x_i. D'après la question (1), on en déduit que $x^{\phi(n} \to (x_1, x_2, \ldots)$.

* * *

Solution de l'exercice 3.5. Considérons le sous-ensemble K de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ constitué des fonctions qui valent 0 ou 1 sur $\mathbb{Z}$. L'ensemble K est alors non dénombrable, et pour $f, g \in K$ on a $\|f-g\|_\infty \geq 1$. On en déduit que les boules ouvertes $(B(f,1/2))_{f\in K}$ sont disjointes, et donc $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas séparable (car si on considère une suite, il existe une telle boule ouverte ne comportant pas d'élements de cette suite).

* * *

Solution de l'exercice 3.6.

(1) On va appliquer porte-manteau. Soit F fermé, $\varepsilon > 0$. Notons $F_\varepsilon = \{x \in E : d(x,F) \leq \varepsilon\}$, qui est fermé. Alors
$$\mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y_{n,k} \in F_\varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$
Puisque $Y_{n,k} \Rightarrow Y_k$, par porte-manteau,
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y_k \in F_\varepsilon) + \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$
Or $Y_k \Rightarrow Y$, donc en passant à la lim sup quand $k \to \infty$, par porte-manteau :
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y \in F_\varepsilon).$$
En faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on conclut que
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y \in F),$$
et donc $X_n \Rightarrow Y$ par porte-manteau.

(2) Puisque (E,d) est séparable complet, $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ est séparable complet. Il suffit donc de montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$. À cet effet, on écrit
$$d_{LP}(Y_p, Y_q) \leq d_{LP}(Y_p, Y_{n,p}) + d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) + d_{LP}(Y_{n,q}, Y_q),$$
de sorte que
$$d_{LP}(Y_p, Y_q) \leq \limsup_{n\to\infty} d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}).$$
Ensuite, on écrit
$$d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) \leq d_{LP}(Y_{n,p}, X_n) + d_{LP}(Y_{n,q}, X_n).$$
Or pour tout borélien A,
$$\mathbb{P}(X_n \in A) \leq \mathbb{P}(Y_{n,k} \in A^\varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$

En choisissant K tel que

$$k \geq K \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon/2,$$

on en déduit que pour $k \geq K$, $\limsup_{n\to\infty} d_{LP}(X_n, Y_{n,k}) \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $p, q \geq K$,

$$\limsup_{n\to\infty} d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut.

* * *

Solution de l'exercice 3.7.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\overline{A}$ est compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, et c'est a fortiori le cas pour A.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tout d'abord, remarquons que $\overline{A}$ est également précompact (si A est inclus dans une union de boules rayon ε, $\overline{A}$ est inclus dans une union de boules de rayon 2ε). Par caractérisation séquentielle de la compacité dans un espace métrique, il suffit de montrer que toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\overline{A}$ a une valeur d'adhérence. Par précompacité, on peut construire par récurrence des extractions $\psi_1, \psi_2, \ldots$ et des éléments $z_1, z_2, \ldots$ tels que pour tout $n \geq 1$,

$$x_{\psi_1(n)} \in B(z_1, \varepsilon), \ldots, x_{\psi_1 \circ \cdots \psi_k(n)} \in B(z_k, \varepsilon/2^k), \ldots$$

et $B(z_{k+1}, \varepsilon/2^{k+1}) \subset B(z_k, \varepsilon/2^{k-1})$. Par procédé diagonal, on pose $\phi(n) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n)$ et on vérifie que la suite $(x_{\psi(n)})_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente car E est complet.

* * *

Solution de l'exercice 3.8. D'après le théorème de représentation de Skorokhod, quitte à changer d'espace de probabilité, on peut supposer que la convergence $X_n \to X$ a lieu presque sûrement. En particulier, $X \geq 0$ presque sûrement et le résultat désiré découle du lemme de Fatou.

* * *

Solution de l'exercice 3.9.

(1) Il est clair que si $x_n \to x$, alors $f(x_n) \to f(x)$ pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue bornée, donc F est continue. Par ailleurs, F est clairement injective : si $\delta_x = \delta_y$ avec $x \neq y$, on a alors $1 = \delta_x(\{x\}) = \delta_y(\{x\}) = 0$. Enfin, si $\delta_{x_n} \to \delta_x$, en considérant les fonctions $f_K(u) = \max(1 - Kd(x,u), 0)$ et en remarquant que $\delta_z(f_K) = 0$ si $d(z,x) > 1/K$, on voit que $x_n \to x$. Ceci conclut.

(2) Toute partie de $\{x_n : n \geq 1\}$ est fermée puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ n'a aucune sous-suite convergence par hypothèse. Ainsi, pour toute partie infinie $F \subset \{x_n : n \geq 1\}$, d'après porte-manteau,

$$1 = \limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(F) \leq \mu(F).$$

Donc $\mu(\{x_{2n} : n \geq 1\}) = 1$ et $\mu(\{x_{2n+1} : n \geq 1\} = 1$, absurde.

Pour montrer que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}_1(E)$, considérons une suite $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ. D'après ce qui précède, il existe une extraction telle que $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers une limite notée x. Alors $\delta_{x_{\phi(n)}} \Rightarrow \delta_x$ et donc $\mu = \delta_x$. Ainsi, E_0 est fermé.

(3) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E. Alors $(\delta_{x_n})_{n\geq 1}$ est une suite de E_0, compact (car fermé dans $\mathcal{M}_1(E)$ compact). Il existe donc une extraction ϕ telle que $(\delta_{x_{\phi(n)}})$ converge étroitement, et d'après ce qui précéde il existe $x \in E$ tel que $x_{\phi(n)} \to x$, d'où le résultat.

***

Solution de l'exercice 3.10.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $i \geq 1$, $\{\pi_i \mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendu. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $i \geq 1$ choisissons un compact $K_i \subset E_i$ tel que pour tout $\mu \in \Gamma$ on ait $\pi_i \mu({}^c K_i) \leq \varepsilon/2^i$. On pose alors

$$K = \prod_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \pi_i^{-1}(K_i).$$

Par procédé diagonal on vérifie que K est un compact de E. Par ailleurs, pour tout $\mu \in \Gamma$

$$\mu({}^c K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(\pi_i^{-1}({}^c K_i))) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \pi_i \mu(K_i)) \leq \varepsilon.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact de E tel que $\mu(K) \geq 1-\varepsilon$ pour tout $\mu \in \Gamma$. Par continuité des projections canoniques, les $K_i = \pi_i(K)$ sont compacts. Par ailleurs, pour $i \geq 1$ et $\mu \in \Gamma$, puisque $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$, on a

$$\pi_i \mu(K_i) \geq \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

***

Solution de l'exercice 3.11.

(1) L'inclusion $I : (A, d) \to (E, d)$ étant continue, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, donc les élements de la forme $A \cap O$ avec O ouvert de (E, d) sont des ouverts de (A, d).

Réciproquement, soit U un ouvert de (A, d). Pour tout $x \in U$, il existe alors $r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subset U$. Alors

$$U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r_x).$$

Or $B_A(x, r_x) = B_E(x, r_x) \cap A$. Donc

$$U = \bigcup_{x \in U} (B_E(x, r_x) \cap A) = \left(\bigcup_{x \in U} B_E(x, r_x) \right) \cap A,$$

d'où le résultat en prenant $O = \cup_{x \in U} B_E(x, r_x)$, ouvert dans E.

(2) L'inclusion $I : (A, d) \to (E, d)$ étant continue donc mesurable, on en déduit que les éléments de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$ sont des éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$.

Réciproquement, les éléments de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$ contiennent les ouverts de A (d'après la question précédente) et forment une tribu, donc contiennent les éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$.

(3) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de K qui converge vers $x \in E$. Par compacité dans K, il existe une extraction ϕ et $y \in K$ tels que $x_{\phi(n)} \to y$. Ainsi $y = x \in K$, donc K est fermé.

***

Solution de l'exercice 3.12. On prend par exemple f_n défini comme suit. Pour $n \geq 1$, on écrit $n = 2^N + k$ avec $0 \leq k < 2^N$ et on pose

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\frac{k}{2^N} \leq x \leq \frac{k+1}{2^N}}.$$

(cela correspond à balayer $[0,1]$ avec des rectangles de plus en plus fins).

***

Solution de l'exercice 3.13.

(1) Soit $(x_i)_{i \geq 1}$ une suite dénombrable dense de E. Si U est un ouvert, on écrit

$$U = \bigcup_{i,m \geq 1 : B(x_i, 1/m) \subset U} B(x_i, 1/m).$$

En effet, l'inclusion $\supset$ est claire. Pour l'inclusion $\subset$, soit $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. On considère alors x_i tel que $d(x,x_i) < \varepsilon/4$, de sorte que pour $m = \lfloor 1/(2\varepsilon) \rfloor$, $x \in B(x_i, 1/m)$ et $B(x_i, 1/m) \subset U$.

(2) Oui ! Supposons que tout ouvert de E est union dénombrable de boules ouvertes. On raisonne par l'absurde en supposant que (E,d) est non séparable.

Vérifions d'abord que qu'il existe $r > 0$ et un sous-ensemble $E_1 \subset E$ non dénombrable tel que pour tous $x \neq y$ dans E_1 on a $d(x,y) > r$. Pour chaque $r = 1/n$, considérons un sous-ensemble maximal (pour l'inclusion) de E ayant cette propriété (qui existe d'après le lemme de Zorn). S'ils sont tous dénombrables, alors clairement E est séparable.

Considérons maintenant l'ensemble $E_2 \subset E_1$ des points $x \in E_1$ pour lesquels il existe un point $y_x \in E$ tel que $0 < d(x,y_x) < r/10$.

Cas 1. E_2 est non dénombrable. On pose alors

$$U = \bigcup_{x \in E_2} B(x, d(x,y_x)),$$

qui est une union disjointe. Considérons une boule ouverte $B(z,a) \subset U$. Puisque $z \in U$, il existe $x \in E$ tel que $d(z,x) < d(x,y_x)$. Mais

$$r/5 > 2d(x,y_x) \geq d(x,z) + d(z,y_x) \geq d(z,y_x) > a$$

car $y_x \notin U$ et a fortiori $y_x \notin B(z,a)$. Par conséquent $B(z,a)$ est inclus dans une unique boule $B(x, d(x,y_x))$, et il faut donc un nombre non dénombrable de boules ouvertes pour couvrir U, absurde.

Cas 2. $E_3 = E_1 \backslash E_2$ est non dénombrable. Tout d'abord, remarquons que puisque tout point de E_3 est isolé, tout sous-ensemble de E_3 est ouvert. Pour tout $x \in E_3$, on définit $R(x)$ comme le rayon maximal d'une boule ouverte centrée en x et contenant un nombre au plus dénombrable de points, de sorte que $R(x) \geq r/10$ pour tout $x \in E_3$. Pour un point $x \in E_3$, on dit qu'une *étoile* centrée en x est une union $D = \{x\} \cup C$, où $C = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset E_3$ est une suite dénombrable de points tels que $d(x,z_i) \to R(x)$. Puisque E_3 est non dénombrable, il existe une collection disjointe non dénombrable d'étoiles (pour le voir, on peut raisonner par l'absurde en utilisant le lemme de Zorn). Soit U l'ensemble de leurs centes. Puisque $U \subset E_3$, U est ouvert, et on peut donc l'écrire comme une union de boules ouvertes

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$$

avec $x_i \in U$ et $r_i > 0$. Il existe $i_0 \geq 1$ tel que $r_{i_0} > R(x_{i_0})$, sinon U serait dénombrable. Or, d'une part $B(x_{i_0}, r_{i_0})$ contient une infinité de points de l'étoile D centrée en x_{i_0}, mais d'autre part par construction $U \cap D = \{x_{i_0}\}$, contradiction.

***

Solution de l'exercice 3.14.

(1) Supposons (C) et (B). Soit F fermé et posons $M = \inf_{x\in F} I(x)$. Soit $c \geq 0$ tel que $c < M$ et K_M un compact de E vérifiant l'inégalité de (C). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $F \cap K_M$ est compact, pour n assez grand :

$$\mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}_n(F \cap K_M) + \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \quad \leq \quad e^{\left(-\inf_{x\in F\cap K_M} I(x)+\varepsilon\right)n} + e^{(-M+\varepsilon)n} \leq 2e^{(-M+\varepsilon)n}.$$

Il s'ensuit que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(F) \leq -M + \varepsilon$$

et le résultat désiré en découle en faisant $\varepsilon \to 0$.

(2) Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dénombrable dense. Soit $M > 0$. Pour $k \geq 1$ notons O_k l'ouvert

$$O_k = \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$$

Montrons que pour tout $k \geq 1$ il existe $\ell_k \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}_n(E \backslash O_{\ell_k}) \leq e^{-nkM}. \tag{4}$$

Pour cela, soit $k \geq 1$ et soit $M' > M$. Par compacité il existe un entier $j_k \geq 1$ tel que

$$\{x \in E : I(x) \leq kM'\} \quad \subset \quad O_{j_k}.$$

Par (A) :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash O_{j_k}) \leq -\inf_{x\in E\backslash O_{j_k}} I(x) \leq -kM'.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}_n(E \backslash O_{j_k}) \leq e^{-nkM}.$$

En prenant $\ell_k \geq j_k$ suffisamment grand, l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $n \geq 1$, ce qui donne (11).

Ensuite, on définit

$$K = \bigcap_{k \geq 1} \overline{O_{\ell_k}},$$

qui est fermé et précompact dans E complet, donc compact. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}_n(E \backslash K) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n\left(E \backslash \overline{O_{\ell_k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n\left(E \backslash O_{\ell_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-nkM} = \frac{e^{-nM}}{1-e^{-nM}}.$$

On conclut que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \leq -M.$$

Remarque. La propriété (C) s'appelle tension exponentielle. L'exercice 2 est inspiré des Lemma 2.5 et Lemma 2.6 dans James Lynch. Jayaram Sethuraman. "Large Deviations for Processes with Independent Increments." Ann. Probab. 15 (2) 610 - 627, April, 1987. https://doi.org/10.1214/aop/1176992161 et constitue à présent une brique de base de la théorie des grandes déviations.

***

Solution de l'exercice 3.15.

(1) Soit $(\mathbb{P}_{(X_n,Y_n)})_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. On montre que cette suite admet une sous-suite qui converge étroitement vers un élément de $\mathcal{F}$. Montrons d'abord que cette suite est tendue.

Soit $\varepsilon > 0$. Soient K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\mu(K_1) \geq 1-\varepsilon$ et $\nu(K_2) \geq 1-\varepsilon$. Alors pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left((X_n, Y_n) \in K_1 \times K_2\right) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Ainsi, d'après le théorème de Prokhorov, il existe une sous-suite φ et une variable aléatoire (U,V) telle que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$ converge en loi vers (U,V). Il suffit de vérifier que U et X ont la même loi, ainsi que V et Y. Pour cela, la continuité de $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ implique que $X_{\varphi(n)}$ converge en loi vers U et $Y_{\varphi(n)}$ converge en loi vers V. Puisque $X_{\varphi(n)}$ a la même loi que X et $Y_{\varphi(n)}$ a la même loi que Y, le résultat s'ensuit.

(2) Soit $P_{(X_n,Y_n)}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\mathbb{E}\left[|X_n - Y_n|\right] \to I.$$

D'après la question (1), il existe une sous-suite φ et un élément $P_{(X,Y)}$ de $\mathcal{F}$ tels que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$ converge en loi vers (X,Y). Montrons que

$$\mathbb{E}\left[|X - Y|\right] = I.$$

Pour tout $R \geq 0$, la fonction $(x,y) \mapsto |x-y| \wedge R$ étant continue bornée,

$$\mathbb{E}\left[|X_n - Y_n| \wedge R\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[|X - Y| \wedge R\right].$$

Puisque $\mathbb{E}\left[|X_n - Y_n| \wedge R\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n - Y_n|\right]$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[|X - Y| \wedge R\right] \leq I.$$

En faisant $R \to \infty$ on obtient $\mathbb{E}\left[|X-Y|\right] \leq I$. On a clairement $I \leq \mathbb{E}\left[|X-Y|\right]$ par définition de I, d'où le résultat.

Remarque. La famille $\mathcal{F}$ est appelée ensemble des couplages de X et Y, et le couplage de la question (2) est appelé couplage (ou transport) optimal pour le coût L^1. Cet exercice est inspiré de la Section 5.4.3 de ce document.

* * *

Solution de l'exercice 3.16. On s'inspire d'une preuve des compléments du cours 3. Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dénombrable dense. On considère l'ensemble H de fonctions $f_I^{K,N}$ avec $K,N \geq 1$ et $I \subset \{1,2,\ldots,K\}$ définies par

$$f_I^{K,N}(x) = \max\left(1 - Nd\left(x, \bigcup_{i\in I} B\left(x_i, \frac{1}{N}\right)\right), 0\right).$$

L'ensemble H est dénombrable et est bien constitué de fonctions continues bornées (et même lipschitziennes bornées). Vérifions qu'il convient. Supposons que pour tout $f \in H$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$ et vérifions que μ_n converge étroitement vers μ en montrant que $d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n > 1/\varepsilon$. Soit $K \geq 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq K} B(x_i, 1/n)\right) \leq 1/n \leq \varepsilon.$$

Soit $A \in \mathcal{B}(E)$. Notons $I_A = \{i \in \{1,2,\ldots,K\} : B(x_i, 1/N) \cap A \neq \varnothing\}$. Alors

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{i\in I_A} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)\right) + \mu\left(\bigcup_{i\geq K} B(x_i, 1/N)\right) \\ &\leq \mu(f_I^{K,N}) + \varepsilon \\ &\leq \mu_n(f_I^{K,N}) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour n assez grand. Mais par définition $\mu_n(f_I^{K,N}) \leq \mu_n(A^{(2/N)})$, où $A^{(2/N)}$ est le $2/N$-voisinage ouvert de A de sorte que pour n assez grand

$$\mu(A) \leq \mu_n(A^{(2\varepsilon)}) + 2\varepsilon,$$

ce qui implique $d_{LP}(\mu_n, \mu) \leq 2\varepsilon$ d'après la version non symétrique de la distance de Lévy-Prokhorov.

* * *

Solution de l'exercice 3.17.

(1) Non ! Par exemple, si X^n est défini de sorte que $(X_k^n)_{k\geq 1}$ sont indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1^n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_1^n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement $X_k^n = 1$ pour une infinité de valeurs de k, donc presque sûrement $\sup(X^n) = 1$. Par contre, les marginales fini dimensionnelles de X^n convergent en loi vers des vecteurs nuls, de sorte que X^n converge en loi vers la suite nulle.

(2) Oui ! On vérifie que la fonction

$$\begin{array}{cccc} \sup & : & \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_i)_{i\geq 1} & \mapsto & \sup_{i\geq 1} x_i \end{array}$$

est continue (c'est un argument déterministe), et le résultat s'ensuit par stabilité de la convergence en loi par composition par une fonction continue.

***

Solution de l'exercice 3.18.

(1) Notons
$$d_F(\mu,\nu)=\inf\{r>0 : \forall F \text{ fermé de } E, \mu(F)\leq \nu(F^r)+r\}.$$
Tout d'abord, on a $d_{LP}(\mu,\nu)\geq d_F(\mu,\nu)$. En effet, si on choisit $r>d_{LP}(\mu,\nu)$, on a alors
$$\mu(A)\leq \nu(A^r)+r$$
pour tout borélien A et a fortiori pour tout A fermé, ce qui implique que $d_F(\mu,\nu)\leq r$. Ainsi $d_{LP}(\mu,\nu)\geq d_F(\mu,\nu)$.

Choisissons maintenant $r>d_F(\mu,\nu)$, de sorte que
$$\mu(F)\leq \nu(F^r)+r$$
pour tout fermé F. Pour un borélien A, on a alors
$$\mu(A)\leq \mu(\overline{A})\leq \nu(\overline{A}^r)+r=\nu(A^r)+r$$
car $\overline{A}^r=A^r$ (en effet, l'inclusion $A^r\subset \overline{A}^r$ est claire, et pour l'autre inclusion, si $x\in\overline{A}^r$, on trouve $y\in\overline{A}$ tel que $d(x,y)<r$, puis $z\in A$ tel que $d(y,z)<r-d(x,y)$, de sorte que $d(x,z)<r$). Cela entraîne que $d_{LP}(\mu,\nu)\leq r$, ce qui conclut.

(2) Oui ! Comme à la question précédente, on a $d_{LP}(\mu,\nu)\geq d_O(\mu,\nu)$. Pour l'autre inégalité, soit $r>d_O(\mu,\nu)$ de sorte que
$$\mu(O)\leq \nu(O^r)+r$$
pour tout ouvert O. Soit A un borélien ; nous allons vérifier que $\mu(A)\leq \nu(A^{r+\eta})+r+\eta$ pour tout $\eta>0$, ce qui impliquera que $d_{LP}(\mu,\nu)\leq r+\eta$ et concluera. Pour cela, on écrit
$$\mu(A)\leq \mu(A^\eta)\leq \nu((A^\eta)^r)+r\leq \nu(A^{\eta+r})+r+\eta.$$

***

Solution de l'exercice 3.19. Par tension, pour tout $n\geq 1$, il existe un compact $K_n\subset E$ tel que $\mu(K_n)\geq 1-1/n$. Posons
$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n.$$
Alors pour tout $n\geq 1$, $\mu(A)\geq 1-1/n$, de sorte qu'en faisant $n\to 1$ on obtient $\mu(A)=1$. Par ailleurs, A est séparable, étant union dénombrable d'ensembles séparables (puisque compacts).

***

Solution de l'exercice 3.20.

$\boxed{(i)\implies(ii)}$ Ceci découle que l'application
$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\\ (a_{i,j})_{i,j\geq 1} & \mapsto & a_{1,2}\end{array}$$

est continue.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Soit $\varepsilon > 0$. Pour $i, j \geq 1$, soit $C_{i,j}$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}\Big(d_n(X_n(1), X_n(2)) \geq C_{i,j}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}.$$

On vérifie (en utilisant le procédé d'extraction diagonal) que

$$K = \{(a_{i,j})_{i,j\geq 1} \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) : |a_{i,j}| \leq C_{i,j} \text{ pour tous } i, j \geq 1\}$$

est un compact de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R})$, et que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big((d_n(X_n(i), X_n(j)))_{i,j\geq 1} \notin K\Big) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(d_n(X_n(i), X_n(j)) \geq C_{i,j}\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(d_n(X_n(1), X_n(2)) \geq C_{i,j}\Big) \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\boxed{(iii) \implies (ii)}$ Soit $x_n \in E_n$ tel que la suite $(d_n(x_n, X_n(1)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) \geq C/2) \leq \varepsilon/2$. Alors par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C) &\leq \mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) > C/2) + \mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(2)) > C/2) \\
&= 2\mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) > C/2) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $C_\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C_\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$ Puisque d'après le théorème de Fubini

$$\mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C) = \int_{E_n} \mu_n(\mathrm{d}x)\mathbb{P}(d_n(x, X_n(1)) > C),$$

il existe $x_n^\varepsilon \in E_n$ tel que $\mathbb{P}(d_n(x_n^\varepsilon, X_n(1)) > C_\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

Vérifions que $x_n = x_n^{1/4}$ convient. Pour $\varepsilon < 1/2$, l'événement

$$\{d_n(x_n^{1/4}, X_n(1)) \leq C_{1/4}\} \cap \{d_n(x_n^\varepsilon, X_n(1)) \leq C_\varepsilon\}$$

est non vide car de probabilité au moins $1 - \varepsilon - 1/4$. On en déduit que $d_n(x_n^{1/4}, x_n^\varepsilon) \leq C_\varepsilon + C_{1/4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\Big(d_n(x_n^{1/4}, X_n(1)) \geq 2C_\varepsilon + C_{1/4}\Big) \leq \mathbb{P}(d_n(x_n^\varepsilon, X_n(1)) > C_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut.

* * *

Solution de l'exercice 3.21.

(1) Pour f continue bornée, notons $\ell(f)$ la limite de $(\int f \mathrm{d}\mu_n)_{n\geq 1}$. Puisque E est compact, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Soit ψ extraction et μ mesure de probabilité sur E tels que $\mu_{\psi(n)} \Longrightarrow \mu$. En particulier, $\ell(f) = \int f \mathrm{d}\mu$.

Vérifions que $\mu_n \Longrightarrow \mu$. D'après le théorème de Prokhorov, il suffit de vérifier que si $\mu_{\phi(n)} \Longrightarrow \nu$ alors $\nu = \mu$. Par hypothèse $\mu_{\phi(n)}(f) \to \ell(f)$, et donc $\int f \mathrm{d}\nu = \ell(f) = \int f \mathrm{d}\mu$. On conclut que $\nu = \mu$.

(2) Il s'agit d'un résultat dû à Alexandrov, voir par exemple Ramamoorthi, R.V., Rao, B.V. & Sethuraman, J. A note on weak convergence. Sankhya A 74, 269–276 (2012). https://doi.org/10.1007/s13171-012-0016-6 pour une preuve.

***

Solution de l'exercice 3.22.

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et K compact de E tel que $\mathbb{P}(X_1 \in K) \geq 1 - \varepsilon/n$. Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & E^n & \to & E \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array},$$

continue. Alors en notant $K_n = \Phi(K \times K \times \cdots \times K)$, compact comme image continue d'un compact on a

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots X_n \notin K_n) \leq \mathbb{P}(\exists 1 \leq i \leq n : X_i \notin K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \notin K) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

de sorte que $\mathbb{P}(X_1 + \cdots X_n \in K_n) \geq 1 - \varepsilon$, d'où le résultat.

(2) La réponse est oui. Pour cela, il suffit de démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X + Y$ est tendue, alors X et Y sont tendues. Le résultat voulu découle alors par récurrence.

À cet effet, soit $\varepsilon > 0$ et K compact tel que $\mathbb{P}(X + Y \in K) > 1 - \varepsilon$. Notons $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ les lois respectives de X et Y de sorte que par Fubini

$$1 - \varepsilon < \int_{E \times E} \mathbb{1}_K(x + y) \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) \mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y) = \int_E \mathbb{P}_Y(K - x) \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x).$$

Il s'ensuit qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathbb{P}_Y(K - x) > 1 - \varepsilon$. Puisque $K - x$ est compact comme image d'un compact par l'application $z \mapsto z - x$, ceci montre que Y est tendue, et par symétrie X l'est également. Ceci conclut.

***

Solution de l'exercice 3.23.

(1) L'équivalence entre (a) et (c) provient du fait général que $X_n \to X$ en probabilité si et seulement si de toute sous-suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers X.

Montrons que (c) implique (b). Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue bornée. Il suffit de montrer que pour tout extraction ϕ il existe une extraction ψ telle que $\int f \mathrm{d}M_{\phi \circ \psi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement.

Soit ϕ extraction. Par (c), soit ψ extraction telle que presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers M dans $(\mathcal{M}_1(E), \mathrm{d_{LP}})$. L'espace métrique E étant polonais, la convergence au sens de $\mathrm{d_{LP}}$ implique la convergence étroite, et donc presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge étroitement vers M et donc $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement.

Montrons finalement (b) implique (a). Soit ϕ extraction. On montre qu'il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $\mathrm{d_{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \to 0$. Tout d'abord, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on a $\int f \mathrm{d}M_{\phi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ en probabilité, de sorte qu'il existe une extraction ψ telle que $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement. Comme $\mathcal{F}$ est dénombrable, par extraction diagonale, il existe une extraction ψ telle que

$$\text{presque sûrement,} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \mathrm{d}M. \tag{5}$$

Vérifions que presque sûrement $\mathrm{d_{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le rappel, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{F}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i dM \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \le i \le K \right\} \subset B(M, \varepsilon).$$

ATTENTION. Ici $f_1, \ldots, f_K$ sont aléatoires.

Par (5), presque sûrement, pour n assez grand on a

$$\left| \int f_i \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} - \int f_i \mathrm{d}M \right| < \delta$$

pour tout $1 \le i \le K$. Il s'ensuit que presque sûrement, pour n assez grand on a $\mathrm{d_{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \le \varepsilon$, et le résultat s'ensuit.

(2) D'après (1), il suffit de montrer que pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ en probabilité. Pour cela, l'idée est d'utiliser une technique de second moment en montrant que

$$\mathbb{E}\left[\int f \mathrm{d}M_n \right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \mathrm{d}\mu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}\left(\int f \mathrm{d}M_n \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{6}$$

et le résultat s'ensuivra par Bienaymé-Chebyshev.

Pour la première convergence, on remarque que par définition de Π_n^1 on a

$$\mathbb{E}\left[\int f \mathrm{d}M_n \right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n]] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(\Pi^1)] = \int f d\mu,$$

où la convergence provient du fait que Π_n^1 converge en loi vers Π^1, qui a pour loi μ.

Pour la seconde convergence, en utilisant le fait que $\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^2)|M_n] = \int_E f \mathrm{d}M_n$ on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int f \mathrm{d}M_n \right)^2 \right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n]\mathbb{E}[f(\Pi_n^2)|M_n]] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)f(\Pi_n^2)|M_n] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)f(\Pi_n^2)],$$

où l'avant-dernière égalité provient du fait que Π_n^1 et Π_n^2 sont indépendants conditionnellement à M_n. Ainsi, par hypothèse de convergence en loi,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int f \mathrm{d}M_n \right)^2 \right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(\Pi^1)f(\Pi^2)] = \mathbb{E}[f(\Pi^1)]\mathbb{E}[f(\Pi^2)] = \left(\int f \mathrm{d}\mu \right)^2,$$

ce qui conclut.

Remarque. La première question est inspirée de la Proposition 2.2 de cet article et la deuxième question provient du Lemma 3.1 dans cet article.

***

Solution de l'exercice 3.24.

(1) Notons X la limite presque sûre de X_n. On écrit pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(d(Y_n, X) \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(d(Y_n, X_n) \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \varepsilon).$$

Le premier terme de la somme converge vers 0 par hypothèse, et le second tend vers 0 également car la convergence presque sûr entraine la convergence en probabilité.

(2) Non : en prenant $X_n = X$ il suffit de prendre un cas où une convergence en probabilité a lieu sans convergence presque sûre. On peut par exemple prendre $E = \mathbb{R}$, $X_n = X = 0$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n$.

***

Solution du problème 3.25.

(1) Une variante de l'ensemble du cours 1 convient (polynômes à coefficients rationnels multipliés par des fonctions plateaux régularisées).

(2) Pour $x \geq 0$, posons $F(x) = g(0, x) \geq 0$ et $G(x) = F(x) - f(x) \geq 0$. Alors :

- clairement F est croissante
- pour montrer que G est croissante, pour $0 < a < b$:

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) - (f(b) - f(a)) \geq 0.$$

En effet, si $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$, en posant $x_{n+1} = b$ on voit que par définition

$$|f(b) - f(a)| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq g(0, b)$$

et en passant au sup

$$|f(b) - f(a)| + g(0, a) \leq g(0, b).$$

Ainsi

$$F(b) - F(a) \geq |f(b) - f(a)| \geq f(b) - f(a).$$

Ainsi G est croissante.

- Vérifions que F et G sont lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que f est L-lipschitzienne. Alors en utilisant le fait que $g(a, c) \leq g(a, b) + g(b, c)$ pour $a < b < c$, on voit que F est L-lipschitzienne, puis que G est L-lipschitzienne. Pour montrer que F et G sont bornées, on remarque que puisque f est à support compact, F est constante à partir d'un certain rang, et donc G également. Ainsi F est G sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \leq 0$, on pose $F(x) = g(x, 0)$ et $G(x) = F(x) - f(x)$ et le raisonnement précédent s'adapte.

(3) Puisque Z est à densité, les racines de P_n sont presque sûrement différentes. D'après le théorème de Rolle, les racines de P_n' sont réelles et situées entre les zéros de P_n. Notons ainsi $Z_1^n < Z_2^n < \cdots < Z_n^n$ les racines de P_n et quitte à renuméroter les Y_i^n on peut supposer que

$$Z_1^n < Y_1^n < Z_2^n < \cdots < Y_{n-1}^n < Z_n^n.$$

D'après les questions (1) et (2), il suffit de montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante lipschtzienne bornée on a

$$\text{p.s.} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Y_k^n) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(Z)].$$

Pour cela, on remarque que par croissance,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Z_k) - \frac{f(Z_n^n)}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(Z_k^n) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Y_k^n) \le \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(Z_k^n) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(Z_k) - \frac{f(Z_1^n)}{n}.$$

D'après la loi des grands nombres et puisque f est bornée, les deux termes tout à gauche et tout à droite de cette inégalité convergent p.s. vers $\mathbb{E}[f(Z)]$ et le résultat s'ensuit.

(4) D'après la question (1) il suffit de montrer que pour fonction f lipschitzienne bornée on a

$$\text{p.s.} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(Z_1)].$$

Pour cela, tout d'abord on remarque que

$$P_n(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{N_i^n} \qquad \text{avec} \qquad N_i^n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Z_k = a_i}.$$

Le polynôme P_n' a alors, pour $1 \le i \le K$, pour racine a_i avec multiplicité $N_i^n - 1$, et $K-1$ autres racines complexes notées $(W_i^n)_{1 \le i \le K-1}$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) = \sum_{i=1}^{K} \frac{N_i^n}{n} f(a_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} f(W_i^n).$$

D'après la loi des grands nombres, p.s. $N_i^n \to \mathbb{P}(Z_1 = a_i)$. Puisque f est bornée, il s'ensuit que p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{K} f(a_i)\mathbb{P}(Z_1 = a_i) = \mathbb{E}[f(Z_1)].$$

* * *

Solution du problème 3.26.

(1) La séparation et la symétrie de d sont claires. Pour l'inégalité triangulaire, on remarque que pour $u, v, w \in \overline{\mathbb{U}}$ on a $d(u,w) \le \max(d(u,v), d(v,w))$. En effet, si $d(u,w) > d(u,v)$, alors $u \wedge w \preceq u \wedge v$, de sorte que $v \wedge w = u \wedge w$ et $d(u,w) = d(v,w)$.

Pour la séparabilité, $\mathbb{U}$ est dense dans $\overline{\mathbb{U}}$. En effet, si $u \in \partial\mathbb{U}$ et $[u]_k \in \mathbb{U}$ désigne les k premiers entiers de u, on a clairement $d([u]_k, u) \to 0$ quand $k \to \infty$.

Vérifions maintenant que $\overline{\mathbb{U}}$ est polonais. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de $\overline{\mathbb{U}}$. Remarquons que pour tous $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ et $k \geq 1$, on a $d([u]_k, [v]_k) \leq d(u,v)$. Par ailleurs, pour $u, v \in (\mathbb{N}^*)^k$, $d(u,v) < e^{-k}$ implique $u = v$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, $[u_n]_k$ est constant pour n assez grand et converge vers une limite notée $v(k)$, qui vérifie $[v(\ell)]_k = v(k)$ pour tous $k \leq \ell$. Il existe donc $v \in \overline{\mathbb{U}}$ tel que $[v]_k = v(k)$ pour tout $k \geq 1$, et on a $u_n \to v$.

(2) Soit $u \in \overline{\mathbb{U}}$ et $r > 0$. Vérifions que $B(u,r) = \{v \in \overline{\mathbb{U}} : d(u,v) < r\}$ est fermé. Pour cela, soit $v \in \overline{\mathbb{U}} \backslash B(u,r)$ de sorte que $d(u,v) \geq r$, et vérifions que $B(v,r) \cap B(u,r) = \varnothing$. En effet, par l'absurde, si $w \in B(v,r) \cap B(u,r)$, on a $d(w,v) < r$ et $d(w,u) < r$, et alors $d(u,v) \leq \max(d(u,w), d(w,v)) < r$, absurde.

(3) On vérifie tout d'abord que les ensembles de la forme $\{u\}$ et $T(u)$ pour $u \in \mathbb{U}$ sont à la fois ouverts et fermés. Ceci provient de la question précédente, en remarquant que pour $u \in (\mathbb{N}^*)^n$, on a $\{u\} = B(u, 2^{-n-1})$ et $T(u) = B(u, 2^{-n+1/2})$.

L'implication provient alors immédiatement du théorème de porte-manteau.

Pour la réciproque, par séparabilité, tout ouvert peut s'écrire comme union dénombrable de boules ouvertes. On remarque que les boules ouvertes de $\overline{\mathbb{U}}$ sont précisément de la forme $\{u\}$ et $T(u)$ pour $u \in U$, et que deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre. Par suite, tout ouvert O de $\overline{\mathbb{U}}$ peut s'écrire comme union dénombrable disjointe d'ensembles de la forme précédente (ouverts et fermés). Ainsi, en écrivant $O = \coprod_{k\geq 1} O_k$, d'après le lemme de Fatou :

$$\mu(O) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(O_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(O_k) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O),$$

ce qui conclut.

***

Solution du problème 3.27.

(1) L'équivalence entre (b) et (c) provient du fait que la convergence en loi et la convergence en probabilité vers une constante sont équivalentes.

Montrons que (c) implique (d). Soit $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$. Pour montrer que $\int f \, \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int f \, \mathrm{d}\mu$ on va montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que que $\int f \, \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers $\int f \, \mathrm{d}\mu$. Soit donc ϕ extraction. Comme M_n converge en probabilité vers μ, il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $M_{\phi\circ\phi(n)}$ converge (pour d_{LP}) vers μ. Alors presque sûrement $M_{\phi\circ\phi(n)}$ converge étroitement vers μ, donc presque sûrement $\int f \, \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge vers $\int f \, \mathrm{d}\mu$.

Alternativement, pour montrer que (c) implique (d) on peut remarquer que pour $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, l'application $\nu \mapsto |\int f \, \mathrm{d}\nu$ est continue, et que la convergence en probabilité est stable par composition par une fonction continue.

Montrons que (d) implique (c). Soit $\varepsilon > 0$ et montrons que $\mathbb{P}(\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, \mu) > \varepsilon) \to 0$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(M_n \notin B(\mu, \varepsilon)) \to 0$. D'après le fait donné en début d'exercice, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ et

$\delta > 0$ tels que

$$\left\{\nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left|\int f_i d\nu - \int f_i d\mu\right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K\right\} \subset B(\mu, \varepsilon).$$

Alors

$$\mathbb{P}(M_n \notin B(\mu, \varepsilon)) \leq \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}\left(\left|\int f_i \mathrm{d}M_n - \int f_i \mathrm{d}\mu\right| > \delta\right)$$

qui tend vers 0 par hypothèse.

Le fait que (a) implique (d) provient immmédiatement de l'inégalité de Markov.

Le fait que (d) implique (a) provient du fait que la suite $(\int f \mathrm{d}M_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable (car bornée par $\|f\|_\infty$).

Montrons que (c) implique (e). Soit $t \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $\Phi_{\phi\circ\psi(n)}(t)$ converge vers $\Phi(t)$ et $\sup_{|t|\leq 1} |\Phi_{\phi\circ\psi(n)}(t) - \Phi(t)|$ converge vers 0. À cet effet, par (c), pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que p.s. $M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge étroitement vers μ. D'après l'Exercice 6 (2) de la Feuille 1 d'exercices, on a bien que p.s. $\Phi_{\phi\circ\psi(n)}$ converge vers $\Phi(t)$ sur tout compact.

Montrons que (e) implique (d). Soit $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$. Il suffit de montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge en probabilité vers $\int f \mathrm{d}\mu$.

Soit ϕ extraction. Vérifions d'abord qu'il existe une extraction ψ telle que p.s. $(M_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ est tendue. Soit $\delta > 0$ et ψ extraction telle que $\sup_{|t|\leq\delta} |\Phi_{\phi\circ\psi(n)}(t) - \Phi(t)|$ converge presque sûrement vers 0. Comme dans le cours 1, en utilisant l'inégalité

$$M_{\phi\circ\psi(n)}(\mathbb{R}\backslash[-A, A]) \leq cA \int_{-1/A}^{1/A} (1 - \mathrm{Re}\Phi_{\phi\circ\psi(n)}(t))\mathrm{d}t$$

en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ et en utilisant la continuité de Φ en 0, on conclut que $(M_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ est tendue.

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et vérifions que $\int f \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int f \mathrm{d}\mu$ en trouvant une extraction Ψ telle que $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge en probabilité vers $\int f \mathrm{d}\mu$ (cela suffit, cf Exercice 1). Soit $\varepsilon > 0$. D'après le paragraphe précédent, par tension, p.s. on peut trouver $A > 0$ tel que $\mu(\mathbb{R}\backslash[-A, A]) \leq \varepsilon$ et $M_{\phi\circ\psi(n)}(\mathbb{R}\backslash[-A, A]) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. A fortiori, si g est une fonction continue à support compact inclus dans $[-A, A]$, on a

$$\left|\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} - \int f \mathrm{d}\mu\right| \leq 2\varepsilon\|f\|_\infty + \left|\int g \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} - \int g \mathrm{d}\mu\right|.$$

Sans perte de géneralité on peut donc supposer que f est à support compact. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, on peut trouver des complexes $(\alpha_j)_{1\leq j\leq k}$ et des réels $(t_j)_{1\leq j\leq k}$ tels que

$$\sup_{|x|\leq A} \left|f(x) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{it_j x}\right| \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\left| \int_{-A}^{A} f(x) M_{\phi\circ\psi(n)}(\mathrm{d}x) - \int_{-A}^{A} f(x)\mu(\mathrm{d}x) \right| \leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| |\Phi_{\phi\circ\psi(n)}(t_j) - \phi(t_j)|,$$

qui tend en probabilité vers 0 par hypothèse. Le résultat désiré en découle.

Remarque. Strico-sensu, il faut faire attention car les variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas forcément définies sur le même espace de probabilité, de sorte qu'on ne peut pas parler de convergence p.s. (ce point m'a été signalé par Dimitri Faure). Cependant, sans perte de généralité, on peut supposer que les variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$ sont définies sur le même espace de probabilité, par exemple en considérant une suite $(M'_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité telles que pour tout $n \geq 1$ les lois de M_n et M'_n sont les mêmes (on utilise l'existence de mesures produit), et en travaillant avec M'_n à la place de M_n (les propriétés considérées ne dépendent que des lois individuelles).

(2) (a) Démontrons que M_n converge en probabilité vers μ en montrant que pour toute extraction ϕ il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge vers M (i.e. presque sûrement $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_{\phi\circ\psi(n)}, M) \to 0$). Soit donc ϕ extraction. Par procédé diagonal, il existe une extraction ψ telle que p.s. pour tout $k \geq 1$, $\int x^k \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$. D'après un exercice de la feuille d'exercices, p.s. $M_{\phi\circ\psi(n)}$ converge étroitement vers M, donc p.s. $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_{\phi\circ\psi(n)}, M) \to 0$.

Alternativement, sans redéfinir les variables aléatoires sur le même espace de probabilité, il est possible de vérifier que (M_n) est tendue et pour l'identification de la limite utiliser le principe des lois accompagnantes en considérant la fonctionnelle $\nu \mapsto \int \max(\min(x^k, K), -K)\mathrm{d}\nu$ avec $K \to \infty$.

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left| \int x^k \mathrm{d}M_n - \int x^k \mathrm{d}\mu \right| \geq 2\varepsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left| \int x^k \mathrm{d}M_n - \mathbb{E}\left[\int x^k \mathrm{d}M_n \right] \right| \geq \varepsilon \right) + \mathbb{P}\left(\left| \mathbb{E}\left[\int x^k \mathrm{d}M_n \right] - \int x^k \mathrm{d}\mu \right| \geq \varepsilon \right) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(\int x^k \mathrm{d}M_n)}{\varepsilon^2} + \mathbb{1}_{\left| \mathbb{E}\left[\int x^k \mathrm{d}M_n\right] - \int x^k \mathrm{d}\mu \right| \geq \varepsilon} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 par hypothèse, et on peut appliquer la question (a).

(3) L'équivalence entre (a) et (b) est simplement la définition de la convergence étroite.

Le fait que (b) implique (c) est clair.

Pour montrer que (c) implique (b), fixons $\varepsilon > 0$ et montrons que p.s., pour n assez grand $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, \mu) \leq \varepsilon$. D'après le fait donné en début d'exercice, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(\mu, \varepsilon).$$

Par hypothèse, p.s. pour n assez grand

$$\left| \int f_i dM_n - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K$$

Ainsi, p.s. pour n assez grand $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n,\mu) \le \varepsilon$.

Alternativement, sans redéfinir les variables aléatoires sur le même espace de probabilité, il est possible d'utiliser la question (3) du problème 5.

Le fait que (b) implique (d) est clair : sur l'événement de probabilité 1 où pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ on a $\int e^{itx}\mathrm{d}M_n(\mathrm{d}x) \to \int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Pour montrer que (d) implique (b), l'idée est d'utiliser le théorème de Fubini pour l'interversion. Notons

$$A=\left\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R} : \int e^{itx}\mathrm{d}M_n(\omega)(\mathrm{d}x) \nrightarrow \int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)\right\}$$

ainsi que ses sections

$$A_\omega=\{t\in\mathbb{R} : (\omega,t)\in A\}, \qquad A^t=\{\omega\in\Omega : (\omega,t)\in A\}.$$

Par hypothèse, pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(A^t)=0$. Appliquons alors le théorème de Fubini, en notant λ la mesure de Lebesgue :

$$0=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}(A^t)\lambda(\mathrm{d}t)=\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\mathbb{1}_A \mathrm{d}\mathbb{P}\otimes\mathrm{d}\lambda=\int_\Omega \lambda(A_\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

On en déduit que $\lambda(A_\omega)=0$ pour presque tout $\omega\in\Omega$. Ainsi, p.s. pour λ presque tout $t\in\mathbb{R}$ on a $\int e^{itx}\mathrm{d}M_n(\omega)(\mathrm{d}x)\to\int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$. On conclut avec la première question de l'exercice 2.

(4) C'est une application directe de l'exercice de la feuille d'exercices précédemment mentionné.

(5) D'après la loi forte des grands nombres, pour tout $f\in\mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, pour presque tout $\omega\in\Omega$,

$$\int f\mathrm{d}M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)\to\mathbb{E}[f(X_1)]=\int f\mathrm{d}\mu.$$

D'après la question (3), on en déduit que p.s. M_n converge étroitement vers μ (a fortiori M_n converge en probabilité et en loi vers μ).

***

Solution du problème 3.28.

(1) Par compacité, E est borné. Il existe donc $M>0$ tel que pour tout $x\in E$ on a $\overline{B}(x,M)=E$. Ainsi $\lim_{M\to\infty} I_\mu(M)=1$.

(2) Il est clair que I_μ est croissante, ce qui implique l'existence des limites à gauche. Pour démontrer la continuité à droite, raisonnons par l'absurde en supposant que I_μ n'est pas continue à droite en $\varepsilon_0>0$. Alors par croissance

$$I_\mu(\varepsilon_0)<\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0} I_\mu(\varepsilon).$$

On peut donc trouver $x_0\in E$ et $\delta>0$ tels que pour tout $n\ge1$,

$$\mu(\overline{B}(x_0,\varepsilon_0)))+\delta<I_\mu(\varepsilon_0+1/n).$$

En particulier, pour tout $n\ge1$ on a

$$\mu(\overline{B}(x_0,\varepsilon_0))+\delta<\mu(\overline{B}(x_0,\varepsilon_0+1/n)).$$

Comme $\mu(\overline{B}(x_0,\varepsilon_0+1/n))\to\mu(\overline{B}(x_0,\varepsilon_0))$ lorsque $n\to\infty$, on obtient une contradiction.

(3) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$ mais que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) \neq 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x, 1/n)) \geq \delta$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $x_0 \in E$. Alors $\mu(\overline{B}(x_0, 1/n)) \geq \delta$ pour tout $n \geq 1$. En passant à la limite lorsque $n \to \infty$ on obtient $\mu(\{x_0\}) > 0$, absurde.

(4) Camille se trompe : par exemple, si $E = [0,1]$ et si λ désigne la mesure de Lebesgue, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\lambda$ vérifie $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\mu(\varepsilon) = 0$ mais $\mu(\{0\}) > 0$.

(5) Puisque E est séparable, la convergence étroite implique la convergence au sens de la distance de Lévy-Prokhorov. Soit $\eta > 0$. Pour n assez grand, $d_{LP}(\mu_n, \mu) < \eta$. Soit $x \in E$ tel que $\mu(\overline{B}(x, \varepsilon + \eta)) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta) + \eta$. On a alors

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon + \eta)) + \eta \leq I_\mu(\varepsilon + \eta) + 2\eta.$$

En notant $\eta_n = 2d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$, on a alors $I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta_n) + \eta_n$ et le résultat s'ensuit par continuité a droite de I_μ.

Autre manière de faire. D'après le théorème de porte-manteau, on a pour tout $x \in E$:

$$\limsup_{n \to \infty} \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)).$$

Par ailleurs, comme $I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon))$, en prenant la limsup on en déduit que

$$\limsup_{n \to \infty} I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq \limsup_{n \to \infty} \mu_n(\overline{B}(x, \varepsilon)) \leq \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)).$$

On en déduit le résultat désiré en prenant l'inf sur $x \in E$.

(6) Montrons que (a) implique (b). Supposons (a) et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\inf_{x \in E} \mu(\overline{B}(x, \varepsilon)) = 0.$$

Soit alors une suite (x_n) de E telle que $\mu(\overline{B}(x_n, \varepsilon)) \to 0$. Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que $x_n \to x$. Alors pour n assez grand pour que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ on a

$$\overline{B}(x, \varepsilon/2) \subset \mu(\overline{B}(x_n, \varepsilon)).$$

Donc $\mu(\overline{B}(x, \varepsilon/2)) = 0$, de sorte que $I_\mu(\varepsilon/2) = 0$, absurde.

Le fait que (b) implique (a) s'obtient par contraposée : si μ n'est pas de support plein, il existe un ouvert O tel que $\mu(O) = 0$. En choisissant une boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon)$ incluse dans O on obtient alors $I_\mu(\varepsilon) = 0$.

L'équivalence entre (b) et (c) s'obtient en utilisant l'inégalité démontrée à la question (4), qui implique pour n assez grand, toujours en notant $\eta_n = 2d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$:

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) \leq I_\mu(\varepsilon + \eta_n) + \eta_n \leq I_{\mu_n}(\varepsilon + 2\eta_n) + 2\eta_n \leq I_{\mu_n}(2\varepsilon) + 2\eta_n.$$

Autre manière de faire pour (b) implique (c). Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité, soient $x_1, \dots x_k \in E$ tels que

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon).$$

D'après le théorème le théorème de porte-manteau, pour tout $1 \le i \le k$

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}(x_i,\varepsilon)) \ge \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B(x_i,\varepsilon/2)) \ge \mu(B(x_i,\varepsilon/2)) \ge I_\mu(\varepsilon/2) > 0.$$

On en déduit que

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{1\le i\le k} \mu_n(\overline{B}(x_i,\varepsilon)) > 0.$$

Or pour tout $x \in E$, il existe $1 \le i \le k$ tel que $\overline{B}(x_i,\varepsilon) \subset \overline{B}(x, 2\varepsilon)$. Il s'ensuit que

$$I_{\mu_n}(2\varepsilon) \ge \min_{1\le i\le k} \mu_n(\overline{B}(x_i,\varepsilon))$$

et donc

$$\liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) > 0.$$

Autre manière de faire pour (c) implique (a). Soit O un ouvert de E. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x,\varepsilon) \subset O$. Alors d'après la question (5) on a

$$\mu(O) \ge \mu(B(x,\varepsilon)) \ge \mu(\overline{B}(x,\varepsilon/2)) \ge I_\mu(\varepsilon/2) \ge \limsup_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) \ge \liminf_{n\to\infty} I_{\mu_n}(\varepsilon/2) > 0.$$

(7) Puisque E est séparable, $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ l'est également. On peut donc utiliser le théorème de représentation de Skorokhod et supposer que la convergence de M_n vers M a lieu presque sûrement dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

Supposons (a). Fixons $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. D'après (5), presque sûrement,

$$\liminf_{n\to\infty} I_{M_n}(\varepsilon) > 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\Big(\exists \delta > 0, \exists N \ge 1, n \ge N \implies I_{M_n}(\varepsilon) \ge \delta\Big) = 1.$$

Par monotonie, il s'ensuit l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(\exists N \ge 1, n \ge N \implies I_{M_n}(\varepsilon) \ge \delta\Big) \ge 1 - \varepsilon'.$$

Encore par monotonie, il s'ensuit l'existence de $N > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(I_{M_n}(\varepsilon) \ge \delta \text{ pour } n \ge N\Big) \ge 1 - 2\varepsilon'.$$

On en déduit que pour $n \ge N$ on a $\mathbb{P}\Big(I_{M_n}(\varepsilon) \ge \delta\Big) \ge 1 - 2\varepsilon'$.

Supposons maintenant (b). Par monotonie,

$$\mathbb{P}(M \text{ est de support plein}) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(I_M(1/k) > 0).$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Soient $k \geq 1$ et $\varepsilon' > 0$ fixés. Soient $\delta, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}\left(I_{M_n}(1/k) < \delta\right) < \varepsilon'.$$

D'après (4), l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : I_\mu(1/k) < \delta\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_1(E)$. Le théorème de portemanteau implique que

$$\varepsilon' > \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(I_{M_n}(1/k) < \delta\right) \geq \mathbb{P}\left(I_M(1/k) < \delta\right).$$

Ainsi, on vient de démotrer que pour tous $k \geq 1$ et $\varepsilon' > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(I_M(1/k) = 0\right) \leq \mathbb{P}\left(I_M(1/k) < \delta\right) \leq \varepsilon'.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(I_M(1/k) = 0)$ et le résultat désiré en découle.

(8) Non, les deux implications sont fausses. Donnons des contre exemples dans le cas déterministe. Si $E = [0,1]$, $\mu_{2n} = \delta_0$ et $\mu_{2n+1} = \delta_1$, la suite $(I_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est constante mais $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en loi.

Si $E = [0,2]$ et

$$\mu_n = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_{1/2} + \frac{1}{3}\delta_{1/2+1/n},$$

on a

$$I_{\mu_n}(\varepsilon) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < \varepsilon < 1/2 \\ 2/3 & \text{si } 1/2 \leq \varepsilon < 1/2 + 1/n \\ 3 & \text{si } 1/2 + 1/n \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Par ailleurs μ_n converge étroitement vers $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_{1/2}$, et

$$I_\mu(\varepsilon) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < \varepsilon < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq \varepsilon \end{cases}$$

de sorte que I_{μ_n} ne converge pas au sens de Skorokhod vers I_μ (puisque I_μ ne prend jamais la valeur $2/3$: rappelons que la fusion de sauts macroscopiques n'est pas continue pour la topologie J_1 de Skorokhod).

Remarque. Ce problème est inspiré de l'article suivant :

Benedikt Stufler, Mass and radius of balls in Gromov-Hausdorff-Prokhorov convergent sequences, preprint disponible sur arxiv, arxiv :2201.12251
https://arxiv.org/abs/2201.12251

Il s'agit de pouvoir vérifier certaines propriétés d'une mesure limite (être de mesure pleine comme à la question (7) ou être sans atome) à partir d'estimées sur des mesures qui l'approchent (parfois plus simples à manipuler).

* * *

4 L'espace des fonctions continues sur un compact

4.1 Exercices

Exercice 4.1. Pour tout $n \geq 0$, on se donne deux processus X^n, Y^n dans l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, définis sur un même espace de probabilités (qui peut éventuellement dépendre de n). On suppose que $X^n \to X$ et $Y^n \to Y$ en loi.

(1) Alix dit : la suite $((X^n, Y^n))_{n\geq 0}$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$. A-t-elle raison ?

(2) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme un unique processus

$$t \mapsto (X^n_t, Y^n_t), \qquad t \in [0,1]$$

dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$. Billie dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$? A-t-il raison ?

(3) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme une fonction $(X^n_s, Y^n_t)_{s,t\in[0,1]}$ de $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R}^2)$. Camille dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R}^2)$. A-t-elle raison ?

* * *

Exercice 4.2. Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ une suite de processus dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^k)$. On suppose que $X^n \Rightarrow X$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^k)$. Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$Y_n = \int_0^1 f(X^n_s)ds, \qquad Y = \int_0^1 f(X_s)ds.$$

Montrer que $(X^n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

* * *

Exercice 4.3. Soit X^n, X des processus croissants, continus de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $X^n \Rightarrow X$ si et seulement si X^n converge vers X au sens des marginales fini-dimensionnelles.

* * *

Exercice 4.4.

(1) Pour $a \geq 0$, l'application $f \mapsto t_a(f) = \inf\{t \geq 0 : f(t) \geq a\}$ définie sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est-elle continue ? Sinon a-t-elle des points de continuité, et si oui, lesquels ?

(2) Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus dans $\mathcal{C}$. On suppose que X^n converge en loi vers X pour la topologie uniforme sur les compacts. On suppose également que $X^n_0 = 0$ pour tout $n \geq 1$. On note, pour $a \geq 0$,

$$T^n_a = t_a(X^n), \qquad T_a = t_a(X).$$

Discuter la convergence (ou non) de T^n_a vers T_a. Discuter le cas particulier où X est le mouvement brownien standard (cette dernière question se traite mieux avec la notion de propriété de Markov forte pour le mouvement brownien, voir le cours de calcul stochastique).

* * *

Exercice 4.5. Montrer que $\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f$ est continue$\}$ n'est pas un élément de la tribu produit $\mathbb{R}^{\otimes[0,1]}$.

Indication. On pourra considérer une variable aléatoire U uniforme sur $[0,1]$ et considérer la fonction $X(t) = \mathbb{1}_{t \neq U}$ pour $0 \leq t \leq 1$.

* * *

Exercice 4.6. On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de tribus telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$. On rappelle qu'une martingale est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \geq 0)$ telle que $X_t \in L_1$ pour tout $t \geq 0$ et telle que pour tout $s \leq t$ on a $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus de $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, intégrables et adaptés par rapport à des filtrations $(\mathcal{F}_t^n)$, c'est-à-dire que X_t^n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^n$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que X^n est une $\mathcal{F}^n$-martingale, et que X^n converge en loi vers X dans $\mathcal{C}$. On suppose également que pour tout $t \in [0,1]$, $(X_t^n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

Montrer que $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale où $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

* * *

Exercice 4.7. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$. On note $X_n = (X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)$.

(1) Démontrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifies :

 (a) la suite $(X_n(0))_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$;

 (b) pour toute suite $\delta_k \to 0$ et pour toute suite $(n_k)_{k \geq 1}$, on a
$$\omega(X_{n_k}, \delta_k) \quad \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0,$$
 où $\omega(f, \delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta, 0 \leq s,t \leq 1} |f(s) - f(t)|$ désigne le module de continuité.

(2) Soit $(X_n^i)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$ telle que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $(X_n^i)_{1 \leq i \leq n}$ ont la même loi que X_n (mais on ne les suppose pas indépendantes). On suppose que :

 (I) la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$;

 (II) la suite de variables aléatoires $\sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)|$ est uniformément intégrable.

 Démontrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$, où Y_n est définie par
$$Y_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n^i(t), \qquad t \in [0,1].$$

(3) Le résultat de la question (2) reste-t-il vrai si on remplace (II) par (II') défini par

 (II') la suite de variables aléatoires $\sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)|$ est bornée dans L^1 ?

 Justifiez votre réponse.

* * *

Exercice 4.8. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On suppose qu'il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad \mathbb{E}[(X_1(s)-X_1(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall 0 \leq s \leq 1, \quad \mathbb{E}[X_1(s)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty.$$

On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

(1) Pour $0 \leq s,t \leq 1$, calculer $\mathbb{E}[(Z_n(s)-Z_n(t))^2]$.

(2) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1])$.

***

Exercice 4.9. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien réel standard partant de x. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

(1) Lorsque $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, montrer que la suite $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(2) Le résultat reste-t-il vrai si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est plus supposée bornée ? Justifiez votre réponse.

***

Exercice 4.10. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple de variables aléatoires $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ tel que X_ε a la même loi que X, Y_ε a la même loi que Y et $\mathbb{P}(\|X_\varepsilon - Y_\varepsilon\|_\infty > \varepsilon) < \varepsilon$. Montrer que X et Y ont même loi.

***

Problème 4.11. Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme uniforme et la tribu borélienne associée. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(1) Montrer que la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ est égale à l'ensemble des A de la forme $A = B \cap \mathcal{C}$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$.

Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ sont deux variables aléatoires, on dit que Y est une *modification* (ou *version*) de X si pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$.

(2) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ deux variables aléatoires.

  (a) Vérifier que si Y est une modification de X, alors X et Y ont la même loi.

  (b) Billie dit : la réciproque de (a) est vraie. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

$\boxed{\text{Dans toute la suite de cet exercice, on fixe une variable aléatoire } Y : \Omega \to \mathcal{C}.}$ (Ainsi Y_ω est une fonction continue pour tout $\omega \in \Omega$.)

(3) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ une variable aléatoire. On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Notons $Y^\star$ la variable aléatoire Y vue comme fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Démontrer qu'il existe une application mesurable $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathcal{C}$ telle que $Y = F \circ Y^\star$.

Indication. On pourra utiliser le lemme de Doob-Dynkin, qui est le résultat suivant. Lorsque f, g sont deux fonctions mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans respectivement $(S, \mathcal{S})$ et $(T, \mathcal{T})$, si $f : (\Omega, \sigma(g)) \to (S, \mathcal{S})$ est mesurable et si $(S, \mathcal{S})$ est un espace polonais muni de de sa tribu borélienne, alors il existe une application mesurable $h : (T, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{S})$ telle que $f = h \circ g$.

(b) Démontrer qu'il existe une variable aléatoire $X' : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que X' soit une modification de X.

(4) (a) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d) complet séparable. On suppose que les deux suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ ont même loi. Montrer que $\{(U_n)_{n\geq 1}$ converge$\}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega \in \Omega : U_n(\omega)$ converge quand $n \to \infty\}$) est un événement (i.e. est mesurable) et que

$$\mathbb{P}\left((U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right) = \mathbb{P}\left((V_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right).$$

(b) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que X_n converge vers Y au sens des marginales fini-dimensionnelles. On suppose aussi que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $X(q)$.

* * *

Problème 4.12.

Première partie. Soit (E, d) un espace métrique séparable et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E muni de sa tribu borélienne, et $\mathrm{Lip}_1(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ 1-lipschitziennes (c'est-à-dire telles que $d(f(x), f(y)) \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in E$).

Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$. L'objectif de cette partie est de montrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int f \, \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction f de la forme

$$f(x) = \max(c_0, c_1 - d(x, x_1), \ldots, c_n - d(x, x_n))$$

avec $n \geq 1$ et $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

(1) Justifier l'implication.

(2) Vérifier que pour montrer que $\mu_n \implies \mu$ il suffit de vérifier que $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int f \, \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée.

(3) Démontrer la réciproque.

Indication. Pour $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée telle que $f \geq c_0$, on pourra vérifier que pour tout $x \in E$ on a

$$f(x) = \sup_{n\geq 1} \max(c_0, f(x_n) - d(x, x_n)).$$

(4) Si E est borné (c'est-à-dire si $\sup_{x,y\in E} d(x, y) < \infty$), montrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int f \, \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction $f(x)$ polynomiale en les variables $d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Deuxième partie. Considérons l'ensemble E des fonctions mesurables de $[0,1] \to \mathbb{R}$, considérées à égalité presque partout près (c'est-à-dire qu'on identifie deux fonctions égales presque partout) muni de la distance

$$\mathrm{d}(f,g) = \int_0^1 \min(1, |f(t) - g(t)|)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

(5) En notant λ la mesure de Lebesgue, montrer que $f_n \to f$ dans E si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lambda(\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(6) On suppose que $f_n \to f$ dans E. Montrer qu'on peut trouver une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)}$ converge presque partout vers f.

(7) Démontrer que E est polonais.

Troisième partie. Considérons l'espace métrique $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la distance d définie par (7).

(8) Vérifier que $(\mathcal{C}, d)$ est séparable et borné. Est-il complet ? Justifier votre réponse.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}$.

(9) Démontrer que si X_n converge en loi vers X, alors pour tout $k \geq 1$, si $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ sont i.i.d. uniformes sur $[0,1]$ (aussi indépendantes de X_n, X) on a la convergence en loi de $(X_n(U_1), \ldots, X_n(U_k))$ vers $(X(U_1), \ldots, X(U_k))$.

(10) On suppose que les marginales fini-dimensionnelles de X_n convergent en loi vers celles de X. Démontrer que X_n converge en loi vers X.

(11) *[Question bonus hors barème]* Démontrer que X_n converge en loi vers X si et seulement si, pour tout $k \geq 1$, en notant $V_1^k, \ldots, V_k^k$ le réarrangement croissant de k variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$ (aussi indépendantes de X_n et X) on a la convergence en loi de $(X_n(V_1^k), \ldots, X_n(V_k^k))$ vers $(X(V_1^k), \ldots, X(V_k^k))$.

* * *

Problème 4.13. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_i = E_1 + \cdots + E_i$ pour $i \geq 1$. Pour $t \geq 0$ on pose $P(t) = \mathrm{Card}\{i \geq 1 : S_i \leq t\}$, de sorte que P est un processus de Poisson de paramètre 1.

Première partie.

(1) Montrer que pour tout $T \geq 0$ on a $\sup_{0\leq u\leq T} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$

(2) Est-il vrai que $\sup_{u\geq 0} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme sur tout compact. On suppose qu'il existe une variable aléatoire $Y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que pour tout $T \geq 0$, $(Y_n(t) : 0 \leq t \leq T)$ converge en loi vers $(Y(t) : 0 \leq t \leq T)$ dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Démontrer que pour tout $T \geq 0$ la convergence suivante a lieu en probabilité

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n\left(\frac{P(tn)}{n}\right) - Y_n(t) \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0.$$

Troisième partie. Soient $T > 0$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne et $z_0 \in \mathbb{R}_+$.

(4) Justifier que l'équation différentielle $z'(t) = \beta(z(t))$ avec $z(0) = z_0$ admet une unique solution sur $[0, T]$, qui sera notée z dans la suite.

Pour $n \geq 1$, on fixe $Z_n(0) \in \mathbb{R}$ et on suppose que $(Z_n(t))_{0 \leq t \leq T}$ vérifie pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Z_n(t) = Z_n(0) + P\left(n \int_0^t \beta\left(\frac{Z_n(s)}{n}\right) \mathrm{d}s\right),$$

On pose $\bar{Z}_n(t) = Z_n(t)/n$ et on suppose que $\bar{Z}_n(0) \to z_0$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0.$$

Indication. On pourra utiliser le lemme de Gronwall.

***

4.2 Solutions

Solution de l'exercice 4.1.

(1) Oui ! Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Prokhorov, il existe deux compacts K_1, K_2 de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$ tels que $\mathbb{P}(X^n \in K_1) \geq 1 - \varepsilon$ et $\mathbb{P}(Y^n \in K_2) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$, et $\mathbb{P}((X^n, Y^n) \notin K_1 \times K_2) \geq 1 - 2\varepsilon$, ce qui montre que $((X^n, Y^n))_{n \geq 0}$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$.

(2) Oui ! Tout d'abord, il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, $(X^n_t, Y^n_t)_{n \geq 1}$ est tendue. Pour contrôler le module de continuité, munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour une fonction $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$,

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f_1(s) - f_1(t)| + |f_2(s) - f_2(t)| : |s - t| \leq \delta\} \leq \omega(f_1, \delta) + \omega(f_2, \delta).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\omega((X^n, Y^n), \delta) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(\omega(X^n, \delta) \geq \eta) + \mathbb{P}(\omega(Y^n, \delta) \geq \eta),$$

ce qui implique la tension.

Remarque. Alternativement, on peut utiliser le fait que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2) \\ (f, g) & \mapsto & (f(t), g(t))_{0 \leq t \leq 1} \end{array}$$

est continue et la stabilité de la tension par composition par une fonction continue.

(3) Oui ! Il suffit de vérifier que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2) \\ & & (f,g) & \mapsto & (f(s),g(t))_{0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 1} \end{array}$$

et le résultat en découlera par stabilité de la tension par composition par une fonction continue. À cet effet, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$, et en notant $d(F,G)=\sup_{(s,t)\in[0,1]^2}\|F(s,t)-G(s,t)\|_1$ pour $F,G\in\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$, on remarque que

$$d(\Phi(f,g),\Phi(f',g'))=\|f-f'\|_\infty+\|g-g'\|_\infty.$$

Il en découle que si $f_n\to f$ et $g_n\to g$, alors $\Phi(f_n,g_n)\to\Phi(f,g)$, d'où le résultat.

***

Solution de l'exercice 4.2. D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que la convergence $X^n\to X$ a lieu presque sûrement. Par continuité de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \int_0^1 f(g(s))ds, \end{array}$$

on en déduit que $Y_n\to Y$ presque sûrement. Ainsi, $(X^n,Y_n)\to(X,Y)$ presque sûrement, et donc en loi.

Remarque. On peut aussi directement dire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k) & \to & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)\times\mathbb{R} \\ & g & \mapsto & (g,\int_0^1 f(g(s))ds) \end{array}$$

est continue, et donc que $\Phi(X^n)$ converge en loi vers $\Phi(X)$.

***

Solution de l'exercice 4.3. $\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication est toujours vraie.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Puisque $(X^n(0))_{n\geq 1}$ converge en loi, il suffit de vérifier que la suite $(X^n)_{n\geq 1}$ est tendue. D'après le cours (prendre $\delta=1/k$ en haut de la page 3 dans les notes du cours 5), que pour une fonction $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\omega(f,1/k)\leq 3\max_{0\leq i\leq k-1}\sup_{r\in[0,1/k]}|f(r+i/k)-f(i/k)|.$$

En particulier, si f est croissante, on a

$$\omega(f,1/k)\leq 3\max_{0\leq i\leq k-1}|f((i+1)/k)-f(i/k)|.$$

Par ailleurs, par convergence des marginales fini-dimensionnelles de X^n vers celles de X, on a

$$\max_{0\leq i\leq k-1}|X^n((i+1)/k)-X^n(i/k)| \quad \underset{n\to\infty}{\overset{(\text{loi})}{\longrightarrow}} \quad \max_{0\leq i\leq k-1}|X((i+1)/k)-X(i/k)|.$$

Par continuité de X, on pour tout $\eta>0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq i\leq k-1}|X((i+1)/k)-X(i/k)|\geq\eta\right) \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

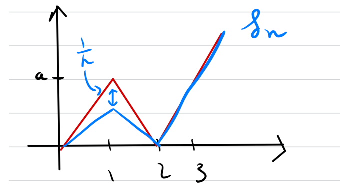
On en déduit que pour tout $\varepsilon,\eta>0$, on peut trouver $k\geq 1$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(\omega(X^n,1/k)\geq\eta)\leq\varepsilon.$$

***

Solution de l'exercice 4.4.

(1) Non, elle n'est pas continue. Dans l'exemple ci-dessous, $f_n \to f$ uniformément sur tous les compacts, mais $3 = t_a(f_n) \nrightarrow t_a(f) = 1$. On vérifie aisément que les points de continuité de cette application sont les fonctions $f \in \mathcal{C}$ telles que $t_a(f) = \infty$ ou bien telles que $t_a(f) < \infty$ et f n'admet pas de maximum local en $t_a(f)$.



(2) Tout d'abord, il est clair que $0 = T_0^n$ converge vers $T_0 = 0$. On suppose donc $a > 0$. D'après la question précédente, si presque sûrement, X n'admet pas de maximum local en T_a lorsque $T_a < \infty$, alors T_a^n converge en loi vers T_a (utiliser par exemple le théorème de représentation de Skorokhod). Lorsque X est le mouvement brownien standard, on sait que $T_a < \infty$ presque sûrement, et puisque pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\sup_{[0,\epsilon]} X > 0\right)$, d'après la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt T_a, presque sûrement X n'admet pas de maximum local en T_a. Ainsi, dans ce cas, T_a^n converge en loi vers T_a.

Maintenant, si avec probabilité strictement positive $T_a < \infty$ et X admet un maximum local en T_a, alors on peut trouver X^n tel que T_a^n ne converge pas en loi vers T_a. En effet, puisque

$$\{T_a < \infty \text{ et } X \text{ admet un maximum local en } T_a\} = \bigcup_{k \geq 1} \{T_a < k \text{ et } X_t < a \text{ pour } 0 < |t - T_a| \leq 1/k\},$$

il existe $k \geq 1$ tel que $A = \{T_a < k \text{ et } X_t < a \text{ pour } 0 < |t - T_a| \leq 1/k\}$ vérifie $\mathbb{P}(A) > 0$. Pour $\omega \notin A$ on pose $X^n = X$ et pour $\omega \in A$ on peut construire X^n tel que $X^n \to X$ et tel que $T_a^n \geq T_a + 1/k$. En particulier, $\mathbb{E}\left[T_a^n \mathbb{1}_{T_a^{(n)} \leq k}\right] > \mathbb{E}\left[T_a \mathbb{1}_{T_a \leq k}\right]$. En prenant $M > 2k$, on a alors

$$|\mathbb{E}[T_a^n \wedge M] - \mathbb{E}[T_a \wedge M]| \geq \mathbb{P}(A)/k > 0.$$

Donc T_a^n ne converge pas en loi vers T_a (sinon $T_a^n \wedge M$ convergerait en loi vers $T_a \wedge M$).

***

Solution de l'exercice 4.5. On raisonne par l'absurde en supposant que $A = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\} \in \mathbb{R}^{\otimes [0,1]}$. La variable aléatoire $X = (X(t) : 0 \leq t \leq 1)$ a les mêmes marginales fini-dimensionales que la fonction nulle. Ella donc la même loi que la fonction nulle. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(0 \in A) = 1.$$

C'est absurde car X n'est pas continu.

***

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Exercice 4.14. Soit K un espace métrique compact et E un espace métrique. On note $C(K,E)$ l'espace des fonctions continues de K dans E muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x\in K} d_E(f(x),g(x))$. Montrer que $\{B \cap C(K,E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$ est la plus petite tribu sur $C(K,E)$ qui rend toutes les projections

$$\begin{array}{rccc} \Pi_x : & C(K,E) & \to & E \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

pour $x \in K$ mesurables (autrement dit, la trace de la tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ sur $C(K,E)$ est la tribu produit sur $C(K,E)$).

* * *

Solution de l'exercice 4.6. Notons $\mathcal{F} = \{B \cap C(K,E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$, qui est bien une tribu sur $C(K,E)$.

Puisque pour tout $x \in K$ et $A \in \mathcal{B}(R)$, $\{f \in C(K,E) : f(x) \in A\} = \{f \in E^K : f(x) \in A\} \cap C(K,E) \in \mathcal{F}$, la tribu $\mathcal{F}$ rend bien les projections π_x mesurables.

Soit maintenant $\mathcal{G}$ une tribu sur $C(K,E)$ qui rend toutes les projections Π_x mesurables et considérons

$$\{B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K} : B \cap C(K,E) \in \mathcal{G}\}.$$

On vérifie que c'est une tribu qui contient les cylindres de $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$, elle est donc égale à $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$, ce qui conclut.

* * *

Solution de l'exercice 4.7. Tout d'abord, on remarque que par uniforme intégrabilité, pour tout $t \in [0,1]$, X_t est intégrable et $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$.

On fixe $s \leq t$. Soit $A \in \mathcal{F}_t$. Il s'agit de démontrer que

$$\mathbb{E}[X_s \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_A].$$

Puisque l'ensemble des événements A satisfaisant à l'égalité précédente est une classe monotone, il suffit de démontrer que pour tout $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$ et couples de réels $(a_i,b_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $a_i < b_i$ on a

$$\mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}\right].$$

À cet effet, on remarque que

$$\mathbb{E}\left[X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}\right] = \mathbb{E}\left[X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}\right]$$

car l'événement $\{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}$ appartient à $\sigma(X_{t_i}^n : 1 \leq i \leq n)$ est donc à $\mathcal{F}_t^n$.

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que $X^n \to X$ presque sûrement. On a alors les convergences presque sûres

$$X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}$$

et

$$X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1\leq i\leq n}.$$

Par uniforme intégabilité, ces convergences ont également lieu en ajoutant des espérances, ce qui conclut.

* * *

Solution de l'exercice 4.8.

(1) D'après le cours, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la suite $(X_n(0))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\omega(X_n, \delta) \geq \eta) \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Il s'agit donc de démontrer que (8) est équivalent à (b). Démontrons que les deux négations sont équivalentes :

– La négation de (8) est : il existe $\varepsilon, \eta > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\omega(X_n, \delta) \geq \eta) > \varepsilon.$$

– La négation de (b) est : il existe une suite $\delta_k \to 0$ et une suite $n_k \to \infty$ tels que $\omega(X_{n_k}, \delta_k)$ ne converge pas en probabilité vers 0.

En supposant la négation de (8), il existe $\varepsilon, \eta > 0$ et une suite (n_k) telle que pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}\Big(\omega(X_{n_k}, 1/k) \geq \eta\Big) > \varepsilon.$$

Ainsi en prenant $\delta_k = 1/k$ on a bien que $\omega(X_{n_k}, \delta_k)$ ne converge pas en probabilité vers 0.
En supposant la négation de (b), il existe une suite $\delta_k \to 0$, $\eta, \varepsilon > 0$ et une suite (n'_k) telle que pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{P}\Big(\omega(X_{n'_k}, \delta_k) \geq \eta\Big) > \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, pour tout k assez grand tel que $\delta_k < \delta$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\omega(X_{n'_k}, \delta) \geq \eta\Big) > \varepsilon$$

ce qui démontre la négation de (8).

(2) On utilise le résultat de la question (1). On démontre tout d'abord que $(Y_n(0))_{n\geq 1}$ est tendue en montrant qu'elle est bornée dans L^1. Ceci provient du fait que par linéarité

$$\mathbb{E}[|Y_n(0)|] \leq \mathbb{E}[|X_n(0)|] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t)|\right],$$

et puisque la suite de variables aléatoires $\sup_{t\in[0,1]}|X_n(t)|$ est uniformément intégrable elle est bornée dans L^1.

Pour la tension, soit une suite $\delta_k \to 0$ et une suite $(n_k)_{k\geq 1}$. Vérifions que $\omega(Y_{n_k}, \delta_k)$ converge en probabilité vers 0. Tout d'abord, puisque la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$, $\omega(X_{n_k}, \delta_k)$ converge en probabilité vers 0. D'après la question (II), cette suite est également uniformément intégrable et donc $\mathbb{E}\Big[\omega(X_{n_k}, \delta_k)\Big] \to 0$. Ainsi :

$$\omega(Y_{n_k}, \delta_k) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \omega(X^i_{n_k}, \delta),$$

de sorte que

$$\mathbb{E}\Big[\omega(Y_{n_k}, \delta_k)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\omega(X_{n_k}, \delta_k)\Big] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Il s'ensuit que $\omega(Y_{n_k}, \delta_k)$ converge dans L^1 vers 0 et donc en probabilité.

(3) Non. Prenons par exemple une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètres respectifs $1/n$ et prenons $(X_n^i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. de même loi que X_n défini par

$$X_n(t) = \begin{cases} n^2 B_n t & \text{si } t \leq 1/n \\ nB_n & \text{si } t \geq 1/n. \end{cases}$$

Ainsi $\sup_{t\in[0,1]}|X_n(t)|$ est bornée dans L^1 par 1, mais $(Y_n)_{n\geq 1}$ n'est tendue dans $\mathcal{C}$: avec probabilité tendant vers $1/e$ un seul des $(X_n^i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas la fonction nulle, et dans ce cas $\omega(Y_n, 1/n) = 1$, ce qui fait que (8) n'est pas vérifié.

Remarque. Cet exercice est inspiré de l'appendice A de l'article Berzunza Ojeda G, Janson S. The distance profile of rooted and unrooted simply generated trees. Combinatorics, Probability and Computing. 2022;31(3):368-410. doi:10.1017/S0963548321000304.

***

Solution de l'exercice 4.9.

(1) On trouve que $\mathbb{E}[(Z_n(s) - Z_n(t))^2] = \mathbb{E}[(X_1(s) - X_1(t))^2]$.

(2) On vérifie d'abord la tension avec le critère de tension de Kolmogorov. D'une part, pour tout $s \in [0,1]$, $\mathbb{E}[Z_n(s)^2] = \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty$, de sorte que pour tout $s \in [0,1]$, la suite $(Z_n(s))_{n\geq 1}$ est bornée dans L^2, donc tendue. D'autre part, par la question précédente, on a bien pour tous $s,t \in [0,1]$, $\mathbb{E}[(Z_n(s) - Z_n(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}$.

Pour l'identification de la limite, on remarque que les marginales fini-dimensionnelles de Z_n convergent. En effet, pour $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, on peut écrire

$$(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k)) = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}},$$

où $Y_1 = (X_1(t_1), \ldots, X_1(t_k))$ avec les $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. D'après le théorème central limit multidimensionnel, $(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k))$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers un vecteur gaussien centré sur $\mathbb{R}^k$ de matrice de covariance $(\mathbb{E}\left[X_1(t_i)X_1(t_j)\right])_{1\leq i,j\leq n}$.

Ceci conclut.

***

Solution de l'exercice 4.10.

(1) Notons $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Puisque $\mathcal{C}$ est polonais, d'après le théorème de Prokhorov il suffit de montrer que de toute sous-suite de $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement. Sans perte de généralité, il suffit de monter qu'on peut trouver une sous-suite de $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ qui converge étroitement. Puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, on peut trouver une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers x. Vérifions que $\mathbb{P}_{x_{\phi(n)}} \to \mathbb{P}_x$.

Notons $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien réel partant de 0, de sorte que $\mathbb{P}_x$ est la loi de $(x + B_t)_{0\leq t\leq 1}$. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors par convergence dominée

$$\mathbb{P}_{x_{\phi(n)}}(F) = \mathbb{E}\left[F(x_{\phi(n)} + B_t : 0 \leq t \leq 1)\right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[F(x + B_t : 0 \leq t \leq 1)] = \mathbb{P}_x(F).$$

Ceci conclut.

Autres solutions. On peut vérifier le critère de tension via module de continuité ou bien le critère de tension de Kolmogorov.

(2) Non. En raisonnant par l'absurde, si $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ est tendu, par image continue en évaluant à l'instant 0, la suite de mesures $(\delta_{x_n})_{n\geq 1}$ serait tendue dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas en prenant une sous-suite non bornée.

* * *

Solution du problème 4.11.

(1) On a vu dans le cours que la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ est égale à sa tribu produit, i.e. la plus petite tribu rendant les projections $\pi_t : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ mesurables pour $t \in [0,1]$. Vérifions que celle-ci est égale à $\mathcal{F} = \{B \cap \mathcal{C} : B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]} \text{ mesurable}\}$.

Tout d'abord, $\mathcal{F}$ est bien une tribu. Ensuite, pour tout $t \in [0,1]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{f \in \mathcal{C} : f(t) \in A\} = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(t) \in A\} \cap \mathcal{C}$, la tribu $\mathcal{F}$ rend bien toutes les projections mesurables.

Enfin, soit $\mathcal{G}$ une tribu sur $\mathcal{C}$ qui rend toutes les projections mesurables et considérons

$$\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]} : B \cap \mathcal{C} \in \mathcal{G}\}.$$

On vérifie que c'est une tribu de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui contient les cylindres de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, elle est donc égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$, ce qui conclut.

(2) (a) Si Y est une modification de X, pour $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1$ on a $(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (Y(t_1), \ldots, Y(t_n))$ presque sûrement, de sorte que ces deux vecteurs aléatoires ont bien même loi.

(b) Non, il a tort : on prend par exemple ε une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre 1/2 et on pose $X(t) = \varepsilon$ et $Y(t) = 1 - \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq 1$.

(3) (a) Remarquons qu'en notant $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'inclusion (mesurable d'après (1)), on a $Y^\star = I \circ Y$ (en particulier, $Y^\star$ est mesurable comme composée d'applications mesurables). Vérifions que $Y : (\Omega, \sigma(Y^\star)) \to \mathcal{C}$ est mesurable. Soit A un ensemble mesurable de $\mathcal{C}$. D'après (1), il s'écrit $A = B \cap \mathcal{C} = I^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$, de sorte que

$$Y^{-1}(A) = (Y^\star)^{-1}(B)$$

est bien dans $\sigma(Y^\star)$.

D'après le lemme de Doob-Dynkin, puisque $\mathcal{C}$ est polonais, il existe une application mesurable $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathcal{C}$ telle que $Y = F \circ Y^\star$.

(b) On pose $X' = F \circ X$, qui est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}$. Vérifions que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = 1$. Remarquons que puisque X et Y ont la même loi, X et $Y^\star$ ont la même loi. Donc $(X, X') = (X, F(X))$ et $(Y^\star, Y) = (Y^\star, F(Y^\star))$ ont même loi. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = \mathbb{P}(Y^\star(t) = Y(t)) = 1.$$

(4) (a) Puisque E est complet, une suite d'éléments de E converge si et seulement si elle est de Cauchy. Ainsi,

$$\{(U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{p,q\geq N} \left\{ d(U_p, U_q) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

et les résultats désirés s'ensuivent.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

(b) Pour $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, notons $Z(q)$ la limite presque sûre de la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$. En particulier, sur $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, les marginales fini-dimensionnelles de Z et de Y coïncident. On prolonge Z à $[0,1]$ en une variable aléatoire de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ayant les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y en posant $Z(t) = Y(t)$ pour $t \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$.

D'après (2b), il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathcal{C}$ qui soit une modification de Z. Pour $q \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, puisque $X_n(q)$ converge p.s. vers $Z(q)$ et que $Z(q) = X(q)$ p.s., ceci conclut.

Remarque. Le résultat reste vrai si Y n'est pas défini sur le même espace de probabilité que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$: on peut encore prolonger Z à $[0,1]$ en une variable aléatoire de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ayant les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y en utilisant la question (4a).

En effet effet, pour tout $t \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, considérons une suite de rationnels $q_n \to t$. Par continuité de Y, $Y(q_n)$ converge p.s. vers $Y(t)$. Puisque Z et Y ont les mêmes marginales fini-dimensionnelles, les deux suites $(Y(q_n))_{n\geq 1}$ et $(Z(q_n))_{n\geq 1}$ ont même loi. Par (4a), il existe donc une variable aléatoire notée $Z(t)$, limite presque sûre de $(Z(q_n))_{n\geq 1}$. Il s'ensuit que Z a les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y.

Remarque. Cet exercice est inspiré par le Theorem 3.24 dans O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability (2nd Edition), Springer.

***

Solution du problème 4.12.

Première partie.

(1) Ceci simplement du fait qu'une fonction de type $f(x) = \max(c_0, c_1 - d(x,x_1), \ldots, c_n - d(x,x_n))$ est continue bornée.

(2) Par linéarité de l'intégrale, on a alors $\int f \mathrm{d}\mu_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction f lipschitzienne bornée, ce qui implique que $\mu_n \implies \mu$ par le théorème de porte-manteau.

(3) Commençons par vérifier l'indication. Soit $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée telle que $f \geq c_0$.

Si $n \geq 1$, on a $f(x) \geq c_0$ et $f(x) \geq f(x_n) - d(x,x_n)$ car f est 1-lipschtzienne. Donc $f(x) \geq \sup_{n\geq 1} \max(c_0, f(x_n) - d(x,x_n))$.

Ensuite fixons $\varepsilon > 0$ et vérifions qu'on peut trouver $n \geq 1$ tel que $f(x) \leq \max(c_0, f(x_n) - d(x,x_n)) + \varepsilon$. Par densité, soit x_n tel que $d(x,x_n) \leq \varepsilon/2$. Alors

$$f(x) - \varepsilon = f(x_n) + f(x) - f(x_n) - \varepsilon \leq f(x_n) + d(x,x_n) - 2d(x,x_n) = f(x_n) - d(x,x_n),$$

d'où le résultat.

Pour démontrer la réciproque, soit $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée et soit c_0 tel que $f \geq c_0$. Posons

$$f_k(x) = \max_{1\leq i\leq k} \max(c_0, f(x_i) - d(x,x_i)),$$

de sorte que f_n converge simplement vers $f(x)$ en étant croissante. Par ailleurs, f_n est 1-lipschitzienne bornée, donc

$$\int f_i \mathrm{d}\mu_n \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int f_i \mathrm{d}\mu.$$

Comme $\int f_i d\mu_n \leq \int f \mathrm{d}\mu_n$, on en déduit que

$$\int f_i \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

Par convergence monotone, en faisant $i \to \infty$ on conclut que

$$\int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

En remplaçant f par $-f$, le résultat désiré en découle.

(4) Comme pour (1), l'implication est immédiate. Pour la réciproque, soit $A > 0$ tel que $d(x,y) \leq A$ pour tout $x, y \in E$. On remarque que l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & [0,A]^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t_1,\ldots,t_n) & \mapsto & \max(c_0, c_1 - t_1, \ldots, c_n - t_n) \end{array}$$

peut être approchée uniformément par des polynômes en $t_1, \ldots, t_n$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass, ce qui permet de conclure.

Deuxième partie.

(5) Pour l'implication, on écrit, pour $\varepsilon \in]0,1[$, en utilisant l'inégalité de Markov :

$$\lambda\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \lambda\{x \in [0,1] : \min(1, |f_n(x) - f(x)|) \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \min(1, |f_n(t) - f(t)|)\mathrm{d}t,$$

qui tend vers 0.

Pour la réciproque, supposons que $\lambda(\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et notons $A = \{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Alors

$$\int_0^1 \min(1, |f_n(t) - f(t)|)\mathrm{d}t \leq \int_A 1\mathrm{d}t + \int_{A^c} \varepsilon \mathrm{d}t \leq \lambda(A) + \varepsilon,$$

de sorte que $\mathrm{d}(f_n, f) \leq \mathrm{d}t \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

(6) Supposons que $f_n \to f$ dans E. On choisit une extraction ϕ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,1] : |f_{\phi(n)}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^n}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $f_{\phi(n)}$ converge presque partout vers f.

(7) La séparabilité provient du fait que $L^1([0,1], \mathrm{d}\lambda)$ et que la convergence dans $L^1([0,1], \mathrm{d}\lambda)$ implique la convergence pour d car $d(f,g) \leq \|f - g\|_1$.

Pour la complétude, soit (f_n) une suite de Cauchy dans E. Il suffit de monter qu'elle a une valeur d'adhérence. En utilisant la question précédente, soit ϕ une extraction telle que $f_{\phi(n)}$ converge presque partout vers une fonction notée f. Le théorème de convergence dominée entraîne immédiatemen que $\mathrm{d}(f_{\phi(n)}, f) \to 0$, ce qui conclut.

Troisième partie. Tout d'abord, remarquons que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{array}{rccc} \Pi_t : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(t) \end{array}$$

est mesurable. En effet, en posant pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{rccc} \Pi_t^\varepsilon : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \end{array},$$

on voit que Π_t^ε est continu (c'est par exemple une conséquence de (6) et du théorème de convergence dominée) donc mesurable, et $\Pi_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_t^\varepsilon$ est mesurable comme limite d'applications mesurables.

(8) La séparabilité provient par exemple du fait que l'espace métrique des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ munies de la norme uniforme est séparable, combiné avec le fait $d(f,g) \leq \|f-g\|_\infty$ pour tout $f,g \in \mathcal{C}$.

Ensuite, il est clair que $d(f,g) \leq 1$ pour tous $f,g \in \mathcal{C}$.

Enfin, $(\mathcal{C},d)$ n'est pas complet. En effet, si on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \end{cases}$$

la suite f_n est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$ donc pour d, mais elle ne converge pas. En effet, si elle converge vers une fonction continue $f \in \mathcal{C}$, elle converge aussi vers f dans E. Or $f_n \to \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ pour $\|\cdot\|_1$ donc dans E. Ainsi $f = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ presque partout, ce qui est absurde.

(9) Soit $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue bornée. Il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[F(X_n(U_1),\ldots,X_n(U_k))] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[F(X(U_1),\ldots,X(U_k))].$$

À cet effet écrivons

$$\mathbb{E}[F(X_n(U_1),\ldots,X_n(U_k))] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,1]^k} F(X_n(t_1),\ldots,X_n(t_k))\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k\right] = \mathbb{E}[\Phi(X_n)],$$

où

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_{[0,1]^k} F(f(t_1),\ldots,f(t_k))\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k \end{array}.$$

Il suffit alors de remarquer que Φ est continue bornée. En effet, le caractère bornée provient du fait que F est bornée. Pour la continuité, soit $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}$. Puisque $(\Phi(f_n))_{n\geq 1}$ est bornée, il suffit de montrer qu'elle a unique valeur d'adhérence. D'après la question (6), il existe une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ presque partout. Alors par convergence dominée $\Phi(f_{\phi(n)}) \to \Phi(f)$, ce qui conclut.

(10) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans $\mathcal{C}$. D'après la question (4), il suffit de vérifier que pour tout $k \geq 1$ et tout polynôme P en k variables on a

$$\mathbb{E}[P(\mathrm{d}(X_n,f_1),\ldots,\mathrm{d}(X_n,f_k))] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[P(\mathrm{d}(X,f_1),\ldots,\mathrm{d}(X,f_k))]. \tag{9}$$

Or

$$\mathbb{E}\left[P(\mathrm{d}(X_n,f_1),\ldots,\mathrm{d}(X_n,f_k))\right]=\mathbb{E}\left[P\left(\int_0^1 \min(1,|X_n(t)-f_1(t)|)\mathrm{d}t,\ldots,\int_0^1 \min(1,|X_n(t)-f_k(t)|)\mathrm{d}t\right)\right]$$

est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$\int_{[0,1]^N}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^N \min(1,|X_n(t_i)-g_i(t_i)|)\right]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_N$$

avec $N\geq 1$ et $g_i\in\{f_1,\ldots,f_k\}$ pour tout $1\leq i\leq N$. Or, à $t_1,\ldots,t_N\in[0,1]$ fixés, on a

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^N \min(1,|X_n(t_i)-g_i(t_i)|)\right]=\mathbb{E}\left[\Psi(X_n(t_1),\ldots,X_n(t_N))\right]$$

avec

$$\begin{array}{cccc}\Psi: & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x_1,\ldots,x_N) & \mapsto & \prod_{i=1}^N \min(1,x_i-g_i(t_i))\end{array}$$

continue bornée. Ainsi, par convergence dominée

$$\int_{[0,1]^N}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^N \min(1,|X_n(t_i)-g_i(t_i)|)\right]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,1]^N}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^N \min(1,|X(t_i)-g_i(t_i)|)\right]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_N.$$

Ceci démontre (9) et conclut.

(11) Dans le cadre général de l'espace E, voir la Proposition 29 (en annexe) de Aldous, D., & Pitman, J. (2002). Invariance principles for non-uniform random mappings and trees. In Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics (pp. 113-147). Springer, Dordrecht.

* * *

Solution du problème 4.13.

(1) On commence par montrer que

$$\frac{P(t)}{t}\quad \underset{t\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}}\quad 1. \tag{10}$$

Il est clair que $P(t)\to\infty$ lorsque $t\to\infty$ car P est croissante et $P(S_n)=n$. On remarque que $S_{P(t)}\leq t<S_{P(t)+1}$. Soit $\varepsilon>0$. D'après la loi des grands nombres, il existe $N>0$ tel que pour $n\geq N$ on a $|S_n/n-1|\leq\varepsilon$. Alors pour t assez grand pour que $P(t)\geq N$ on a

$$(1-\varepsilon)P(t)\leq S_{P(t)}\leq t<S_{P(t)+1}\leq(1+\varepsilon)(P(t)+1).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{1}{t}\leq\frac{P(t)}{t}\leq\frac{1}{1-\varepsilon}$$

et (10) en découle.

Revenons maintenant à la question initiale. En utilisant (10), soient $\varepsilon > 0$ et $N > 0$ tels que $|P(t)/t - 1| \leq \varepsilon$ pour $t \geq N$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq u\leq T}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| &\leq \sup_{0<u\leq N/n} u\left|\frac{P(un)}{un} - 1\right| + \sup_{N/n\leq u\leq T} u\left|\frac{P(un)}{un} - 1\right| \\
&\leq \frac{N}{n}\sup_{0<u\leq N}\left|\frac{P(u)}{u} - 1\right| + T\sup_{u\geq N}\left|\frac{P(u)}{u} - 1\right| \\
&\leq \frac{N}{n}\sup_{0<u\leq N}\left|\frac{P(u)}{u} - 1\right| + T\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le premier terme tend presque sûrement vers 0 quand $n \to \infty$, d'où le résultat.

(2) Par définition, on remarque que pour $u = S_K/n$ on a

$$\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| = \left|\frac{K}{n} - \frac{S_K}{n}\right| = \frac{|S_K - K|}{n}.$$

Soit A_K l'événement $\{|S_K - K| \geq \sqrt{K}\}$. Alors l'événement

$$\limsup_K A_K = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

appartient à la tribu queue de $(E_i)_{i\geq 1}$ et sa probabilité vaut donc 0 ou 1 d'après la loi de 0-1 de Kolmogorov. Mais

$$\mathbb{P}\left(\limsup_K A_K\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \limsup_{k\to\infty}\mathbb{P}(A_k)$$

D'après le théorème central limite, $\mathbb{P}(A_k) \to 1/2$ lorsque $k \to \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\limsup_K A_K) = 1$. Donc presque sûrement pour une infinité de valeurs de K on a $|S_K - K| \geq \sqrt{K}$. Donc presque sûrement

$$\sup_{u\geq 0}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \geq \frac{\sqrt{K}}{n}$$

pour une infinité de valeurs de K. Donc presque sûrement le sup vaut $+\infty$.

(3) Ceci provient essentiellement de la continuité de l'application

$$\begin{array}{cccc}
\Phi & : & \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}_+) & \to & \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}_+) \\
 & & (f,g) & \mapsto & (f(g(t)) : 0 \leq t \leq T).
\end{array}$$

Cependant $(P(tn)/n)_{0\leq t\leq T}$ n'est pas continue, donc il faut faire un peu attention.

Soient $\varepsilon, \eta > 0$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $t > 0$ posons

$$\omega_L(f,\delta) = \sup_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq L} |f(s) - f(t)|.$$

Par continuité de Y, on a $\omega_{2T}(Y,\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. On peut donc choisir $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\omega_{2T}(Y,\delta) \geq \eta) \leq \varepsilon.$$

Par continuité de $f \mapsto \omega_{2T}(f,\delta)$, $\omega_{2T}(Y_n,\delta)$ converge en loi vers $\omega_{2T}(Y,\delta)$. On en déduit que pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\delta) \geq \eta) \leq 2\varepsilon.$$

Notons

$$\Delta_n = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{P(tn)}{n} - t \right|.$$

D'après la question (1), on a $\Delta_n \to 0$ presque sûrement. En particulier, pour n assez grand

$$\mathbb{P}\left(\frac{P(Tn)}{n} \leq 2T \right) \geq 1 - \varepsilon$$

et presque sûrement $\Delta_n \leq \delta$ pour n assez grand.

Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n\left(\frac{P(tn)}{n} \right) - Y_n(t) \right| \geq \eta \right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{P(Tn)}{n} > 2T \right) + \mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\Delta_n) \geq \eta) \leq \varepsilon + \mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\Delta_n) \geq \eta).$$

Par ailleurs

$$\mathbb{P}(\omega(Y_n,\Delta_n) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(\omega(Y_n,\delta) \geq \eta) + \mathbb{P}(\Delta_n > \delta) \leq 2\varepsilon + \mathbb{P}(\Delta_n > \delta).$$

Or quand $n \to \infty$ on a $\mathbb{P}(\Delta_n > \delta) \to 0$ car $\Delta_n \to 0$ p.s. On en déduit que

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n\left(\frac{P(tn)}{n} \right) - Y_n(t) \right| \geq \eta \right) \leq 3\varepsilon,$$

ce qui conclut.

(4) Ceci provient du théorème de Cauchy-Lipschitz global (β est lipschitzienne).

(5) *Première étape.* Vérifions d'abord que que presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que $|\bar{Z}_n(t)| \leq K$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

D'après la question (1), presque sûrement il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $P(t) \leq a+bt$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, comme β est lipschitzienne, il existe deux constants $A, B > 0$ telles que $|\beta(z)| \leq A + B|z|$ pour $z \in \mathbb{R}$. Alors pour $0 \leq t \leq T$, par définition de Z_n :

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b \int_0^t \beta(\bar{Z}_n(s)) \mathrm{d}s \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b \int_0^t (A + B|\bar{Z}_n(s)|) \mathrm{d}s.$$

On en déduit que

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT + B \int_0^t |\bar{Z}_n(s)| \mathrm{d}s.$$

D'après le lemme de Gronwall, il en découle que pour tout $0 \leq t \leq T$.

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT \right) e^{BT}.$$

Comme $|\bar{Z}_n(0)|$ converge lorsque $n \to \infty$, la quantité de droite est bornée, ce qui conclut la première étape.

Deuxième étape. On montre que presque sûrement il existe $M > 0$ et $L > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s$$

où on a posé $\hat{P}(t) = P(t) - t$.

En utilisant le fait que $z(t) = z_0 + \int_0^t \beta(z(s))\mathrm{d}s$, on écrit

$$\bar{Z}_n(t) - z(t) = \bar{Z}_n(0) - z_0 + \frac{1}{n}\hat{P}\left(n\int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right)\mathrm{d}s\right) - \left(\int_0^t \beta(z(s))\mathrm{d}s - \int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

Soit $L > 0$ une constante de Lipschitz pour β et $M > 0$ tel que $|\beta(x)| \leq M$ pour tout $0 \leq x \leq K$. Alors pour $0 \leq t \leq T$:

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s.$$

Ceci conclut la deuxième étape.

Troisième étape. D'après le lemme de Gronwall, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nKs)|\right)e^{Mt}.$$

Donc

$$\sup_{0 \leq t \leq T}|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq T} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)|\right)e^{LT},$$

qui tend presque sûrement vers 0 par hypothèse et grâce à la question (1).

Remarque. Ce problème est inspiré du Theorem 5.2 de l'ouvrage Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis (Andersson & Britton).

* * *

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

5 Théorème de Donsker, pont brownien

5.1 Exercices

Exercice 5.1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $c > 0$:

$$B_t^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}.$$

(1) Montrer que la famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ $(B^{(c)}, c > 0)$ est tendue.

(2) On suppose que $0 < c < 1$. Montrer l'égalité en loi

$$((B_{c+t}, t \geq 0), (B_s^{(c)}, 0 \leq s \leq 1) \quad \overset{\text{(loi)}}{=} \quad ((\sqrt{c}B'_1 + B_t, t \geq 0), (B'_s, 0 \leq s \leq 1)),$$

où B' est un processus indépendant de B, et de même loi.

(3) On considère des réels strictement positifs $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq 1$ et $0 < t'_1 < \cdots < t'_{k'} \leq 1$ et on garde les notations de la question précédente. Montrer la convergence en loi

$$(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}, B^{(c)}_{t'_1}, \ldots, B^{(c)}_{t'_{k'}}) \quad \underset{c \to 0}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \quad (B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}, B'_{t'_1}, \ldots, B'_{t'_{k'}}).$$

(4) En conclure que $(B, B^{(c)})$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ vers (B, B') lorsque $c \to 0$. Expliquer pourquoi ce résultat peut paraître surprenant.

(5) Que devient la question précédente si on fait cette fois tendre $c \to \infty$?

* * *

Exercice 5.2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. centrées de variance 1. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ainsi que $A_0 = 0$, $A_n = S_1 + \cdots + S_n$. On définit $(S_t)_{t\geq 0}$ et $(A_t)_{t\geq 0}$ par interpolation linéaire. On note enfin, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, \qquad A_t^{(n)} = \frac{A_{nt}}{n^{3/2}}.$$

Montrer que $(S^{(n)}, A^{(n)})$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$ vers une limite dont on précisera la loi.

* * *

Exercice 5.3. Soit $(b_t)_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien. Montrer que presque sûrement ses maxima locaux sont distincts (c'est-à-dire que presque sûrement, pour tous $0 \leq a < b < c < d \leq 1$, $\sup_{[a,b]} b \neq \sup_{[c,d]} b$).

On pourra admettre que les maxima locaux du mouvement brownien sont presque sûrement distincts.

* * *

Exercice 5.4. – *(Loi forte des grands nombres fonctionnelle)* –

(1) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. réelles telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on definit S_t par interpolation linéaire pour $t \geq 0$. On note finalement

$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{n}, \qquad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Montrer que presque sûrement, la convergence suivante a lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$(S_t^{(n)})_{t\geq 0} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad (\mathbb{E}[X_1]\, t)_{t\geq 0}.$$

(2) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard avec $N_0 = 0$. Montrer que presque sûrement, la convergence suivante a lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$\left(\frac{1}{n} N_{nt}\right)_{t\geq 0} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad (t)_{t\geq 0}.$$

* * *

Exercice 5.5. – *(Détails de la preuve du théorème de Lévy)* – On considère une marche aléatoire symétrique simple $(S_n)_{n\geq 0}$ (c'est-à-dire $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. et $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$). On pose

$$I_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k, \quad \theta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \theta_n = \mathrm{Card}\{1 \leq k \leq n : S_k - I_k \neq S_{k-1} - I_{k-1}\} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On définit aussi $\theta_0^{-1} = 0$ et $\theta_k^{-1} = \inf\{n \geq 1 : \theta_n = k\}$ pour $k \geq 1$. Finalement, on pose $X_n = S_{\theta_n^{-1}} - I_{\theta_n^{-1}}$ et on définit $(X_t)_{t\geq 0}$ par interpolation linéaire.

(1) Justifier que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(|S_t|)_{t\geq 0}$ ont même loi.

(2) Vérifier que $(S_n - I_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov récurrente nulle et en déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{S_k - I_k = 0} \quad \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} \quad 0.$$

(3) Montrer que $\max_{1\leq k\leq n}\left|\theta_{k/n}^{-1} - 1\right|$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$ et en déduire que

$$\left(\frac{X_{nt}}{\sqrt{n}} : t \geq 0\right) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{(\text{loi})}{\longrightarrow}} \quad (B_t - I_t : t \geq 0).$$

(4) Conclure que $(B_t - I_t : t \geq 0)$ et $(|B_t| : t \geq 0)$ ont même loi.

* * *

Exercice 5.6. Soit X une variable aléatoire réelle non constante, de fonction caractéristique notée ϕ. On rappelle que X est dite lattice s'il existe $b \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ tel que $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$ et que son span est le plus grand tel h.

(1) Montrer que X est lattice si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}_*$ tel que $|\phi(t_0)| = 1$.

(2) Montrer que X a pour span h si et seulement si $|\phi(2\pi/h)| = 1$ et $|\phi(t)| < 1$ pour $0 < |t| < 2\pi/h$.

On suppose maintenant que X est à valeurs entières. On rappelle que X est dite apériodique si son span vaut 1.

(3) On suppose que X est lattice de span h. A-t-on forcément $h \in \mathbb{Z}$?

(4) Est-il vrai que si le PGCD du support $\mathrm{supp}(X)$ de X vaut 1, alors X est apériodique ?

(5) On suppose qu'il existe $k \in \mathrm{supp}(X)$ tel que $\mathrm{PGCD}(\{i-k : i \in \mathrm{supp}(X)\}) = 1$. Montrer que X est apériodique.

* * *

Exercice 5.7. Donner un exemple d'une famille de variables aléatoires $(X_i^{(n)})_{i,n\geq 1}$ à valeurs entières telles que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $(X_i^{(n)})_{i\geq 1}$ sont i.i.d. apériodiques, et telles que $S_n^{(n)} = X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ satisfait à un théorème central limite mais pas à un théorème local limite.

* * *

Exercice 5.8. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une urne avec $2n$ boules. Parmi celles-ci, n sont étiquetées $+1$ et n sont étiquetées -1. On tire successivement indépendamment au hasard $2n$ boules, on pose $S_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq 2n$ on note S_k la somme des k premières boules tirées. On définit S_t pour $0 \leq t \leq 2n$ par interpolation linéaire. Étudier la convergence en loi de la suite

$$\left(\frac{S_{2nt}}{\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right)$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ dans les deux cas suivants :

(1) les tirages se font **avec** remise,

(2) les tirages se font **sans** remise.

* * *

Exercice 5.9. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et que $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on note μ_n la loi de X_1 sachant que $S_n = 0$.

(1) Démontrer que la suite de mesure de probabilités $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

(2) Alix dit : en notant Y_n une variable aléatoire de loi μ_n, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. A-t-elle raison ?

* * *

Problème 5.10.

Première partie. On considère des variables aléatoires réelles $I_n, I_n(\delta), I, I(\delta)$ pour $\delta > 0$ et $n \geq 1$ telles que :

(i) presque sûrement $I(\delta) \to I$ lorsque $\delta \to 0$,

(ii) pour tout $\delta > 0$, $I_n(\delta)$ converge en loi vers $I(\delta)$ lorsque $n \to \infty$,

(iii) pour tout $n \geq 1$ et $\delta > 0$, $\mathbb{E}[|I_n(\delta) - I_n|] \leq \delta$.

(1) Montrer que $I_n \to I$ en loi lorsque $n \to \infty$.

On considère dans la suite des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ apériodiques avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$. On note $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard issu de 0. On fixe également $0 < \gamma < 1$.

Deuxième partie.

(2) Montrer que pour tout $\delta > 0$, presque sûrement la mesure de Lebesgue de $\{t \in [0,1] : B_t = \delta\}$ est nulle.

(3) Montrer que pour tout $\delta > 0$ la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i| > \delta\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t|>\delta} \mathrm{d}t.$$

Troisième partie.

(4) Montrer que presque sûrement $t \mapsto \frac{1}{|B_t|^\gamma}$ est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(5) Montrer que la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1, S_i \neq 0}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t.$$

(∗) Que se passe-t-il pour $\gamma = 1$?

* * *

Problème 5.11. L'objet de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire qui peut parfois faire plusieurs sauts identiques à la suite.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

Les trois premières parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Première partie. Soit $H \in [1/2, 1]$. On considère une variable aléatoire $W = (W_t)_{0\leq t\leq 1}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien centré, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 1$, pour tous $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$, pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $a_1 W_{t_1} + \cdots + a_k W_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.

b) Pour tous $s, t \in [0,1]$ on a $\mathbb{E}[W_s W_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$.

La famille $(\mathbb{E}[W_s W_t])_{0\leq s,t\leq 1}$ est appelée matrice de covariance de W. On rappelle que la loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa matrice de covariance. En effet, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que toute combinaison linéaire des coordonnées suit une loi normale) centré sa fonction caractéristique est, en notant $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n)}\right] = e^{-\frac{1}{2} u^\top K u},$$

où $^\top$ désigne la transposition et $K = (\mathbb{E}[X_i X_j])_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de covariance.

Enfin, on note $\mathbb{P}_H$ la loi de W (l'existence de $\mathbb{P}_H$ sera démontrée plus tard dans ce problème).

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

$\boxed{(1)}$ Si Z est une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ centrée de variance σ^2, démontrer que $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$.

$\boxed{(2)}$ On suppose l'existence de $\mathbb{P}_H$ pour tout $1/2 \leq H \leq 1$. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & [1/2,1] & \to & (\mathcal{M}_1(\mathcal{C}), d_{\mathrm{LP}}) \\ & & H & \mapsto & \mathbb{P}_H \end{array}$$

est continue.

$\boxed{(3)}$ Démontrer l'existence de $\mathbb{P}_H$ dans le cas où $H = 1$.

Deuxième partie. Soit $H \in]1/2, 1[$. Dans cette partie, $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires réelles centrées de variance finie. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geq 1$ entier. Enfin, on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire et on pose pour $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$:

$$Z_n(t) = \frac{S_{nt}}{n^H}.$$

$\boxed{(4)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que S_i.
b) $\mathbb{E}[S_n^2] = O(n^{2H})$ lorsque $n \to \infty$.
c) (Z_n) converge en loi au sens des fini-dimensionnelles dans $\mathcal{C}$.

Démontrer que Z_n converge en loi dans $\mathcal{C}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{(5)}$ On suppose dans cette question que les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $(Y_i)_{i\geq 1}$ est un vecteur gaussien.
b) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, $S_{n+i} - S_n$ a la même loi que S_i.
c) $\mathbb{E}[S_n^2] \sim c \cdot n^{2H}$ lorsque $n \to \infty$, avec $c > 0$.

Démontrer que Z_n converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(\sqrt{c} \cdot W_t : 0 \leq t \leq 1)$ où la loi de W a été définie dans la première partie.

Troisième partie. Soit $p \in [0,1]$. Dans cette partie, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y_n = (-1)^{X_1+\cdots+X_n}$, puis $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Ainsi, les sauts de la marche (S_n) sont ± 1, le premier saut est ± 1 avec probabilités $1/2$ et pour $n \geq 2$ le n-ième saut est le $(n-1)$-ième saut avec probabilité p, et l'opposé du $(n-1)$-ième saut avec probabilité $1-p$. Enfin, on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire.

$\boxed{(6)}$ Démontrer que pour tous $i, n \geq 1$ on a $\mathbb{E}[Y_i Y_{i+n}] = (2p-1)^n$.

$\boxed{(7)}$ Dans le cas où $p = 1/2$, démontrer que $(S_{nt}/\sqrt{n} : 0 \leq t \leq 1)$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers la loi de W définie dans la première partie pour $H = 1/2$.

Quatrième partie. Soit $H \in]1/2, 1[$. Soit P une variable aléatoire à valeurs dans $[1/2, 1]$ de loi

$$(1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\mathrm{d}x.$$

Dans cette partie, on note $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui, conditionnellement à P, sont indépendantes et telles que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et pour $n \geq 2$ la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-P$. Formellement, si pour $p \in [0,1]$ μ_p est la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont la première a paramètre $1/2$ et les autres ont paramètre $1-p$, la loi $\mathbb{P}_\mathbf{X}$ de $\mathbf{X}$ est caractérisée par le fait que pour tout événement A de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\mathbb{P}_\mathbf{X}(A) = \int_0^1 \mu^p(A)\cdot(1-H)2^{3-2H}(1-x)^{1-2H}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\mathrm{d}x.$$

Soit maintenant $(\mathbf{X}^k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $\mathbf{X}$. Pour $k \geq 1$, on pose $\mathbf{X}^k = (X^k_n)_{n\geq 1}$. Pour $k, n \geq 1$, on pose $Y^k_n = (-1)^{X^k_1+\cdots+X^k_n}$.

$\boxed{(8)}$ Démontrer que lorsque $k \to \infty$, $\left(\frac{Y^1_{n+1}+\cdots+Y^k_{n+1}}{\sqrt{k}} : n \geq 1\right)$ converge en loi au sens des marginales fini-dimensionnelles vers un vecteur gaussien $(G_n)_{n\geq 1}$ centré qui vérifie :

a) pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[G_n^2] = 1$.

b) pour tout $n \geq 1$ et $i \geq 1$, la quantité $r(n) = \mathbb{E}[G_i G_{i+n}]$ ne dépend pas de i et on a on a

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{c_H^2}\frac{H(2H-1)}{n^{2-2H}} \qquad \text{avec } c_H = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}}.$$

Remarque. On admettra que $\int_{1/2}^1 (2u-1)^n(1-u)^{1-2H}\mathrm{d}u \sim \frac{1}{c_H^2}\frac{H(2H-1)}{(1-H)2^{3-2H}}\cdot\frac{1}{n^{2-2H}}$ lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{(9)}$ On pose $V_n = G_1 + \cdots + G_n$ pour $n \geq 1$ et on définit V_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Démontrer que

$$\left(c_H \frac{V_{nt}}{n^H} : 0 \leq t \leq 1\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

où la loi de W a été définie dans la première partie.

* * *

5.2 Solutions

Solution de l'exercice 5.6.

(1) Si X est lattice avec $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$, on a alors $|\phi(\frac{2\pi}{h})| = 1$. Si $|\phi(t_0)| = 1$, alors la preuve du cours montre que $\mathbb{P}\left(X \in b + \frac{2\pi}{t_0}\right) = 1$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$.

(2) C'est une conséquence du fait que si $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$, on a alors $|\phi(\frac{2\pi}{h})| = 1$.

(3) Oui (pour des variables aléatoires non constantes) : si $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$, en prenant $k_1 \neq k_2$ dans le support de X, on a $k_1 = b + ha_1$ et $k_2 = b + ha_2$ pour des entiers a_1 et a_2, de sorte que h est rationnel. Supposons maintenant par l'absurde que le span de X est rationnel non entier. En l'écrivant sous la forme $h = p/q$, et en considérant $k_1 - k_2$, on voit que p divise $k_1 - k_2$. Puisque le span d'une variable

aléatoire est invariant par l'addition d'une même quantité à tous les éléments de son support, on peut supposer que tous les éléments du support de X sont divisibles par p. La variable aléatoire $Y = X/p$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ a alors pour span $1/q$, ce qui absurde car le span d'une variable aléatoire entière vaut clairement au moins 1.

(4) Non, prendre par exemple X à support dans $\{1,3\}$; le span vaut 2.

(5) Soit k dans le support de X avec $\mathrm{PGCD}(\{i-k_1 : i \in \mathrm{supp}(X)\}) = 1$. Avec $k' \neq k$ dans le support de X, on écrit $k = b + ha$ et $k' = b + ha'$ avec $h \in \mathbb{Z}$ le span de X et $b, a, a' \in \mathbb{Z}$. Alors $k - k' = h(a - a')$. Ainsi h divise $\mathrm{PGCD}(\{i-k_1 : i \in \mathrm{supp}(X)\}) = 1$, de sorte que $h = 1$.

* * *

Solution de l'exercice 5.7. On prend par exemple

$$\mathbb{P}(X_1^n = 0) = 1 - e^{-n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \mathbb{P}(X_1^n = 1) = e^{-n}, \qquad \mathbb{P}(X_1^n = 2) = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

qui définit une loi apériodique.

En posant $S_n^n = X_1^n + \cdots X_n^n$, on vérifie que $m_n = \mathbb{E}[S_n^n] = n(e^{-n} + 2/\sqrt{n})$, et que $\mathsf{Var}(S_n^n) \sim 4/\sqrt{n}$.

En faisant un développement limité de la fonction caractéristique de $(S_n^n - m_n)/\sqrt{n\mathsf{Var}(S_n^n)}$, on a le TCL

$$\frac{S_n^n - m_n}{2n^{1/4}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{N}(0,1).$$

En revanche, il n'est pas vrai que

$$\sup_{k \in Z} \left| \sqrt{n\mathsf{Var}(S_n^n)}\,\mathbb{P}(S_n^n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-m_n)^2}{2n\mathsf{Var}(S_n^n)}} \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0,$$

car si c'était le cas, $\mathbb{P}\left(S_n^n = \lceil m_n \rceil + \mathbb{1}_{\lceil m_n \rceil \text{ est pair}}\right)$ aurait alors une décroissance polynomiale, alors que

$$\mathbb{P}(S_n^n \text{ est impair}) \leq n e^{-n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

* * *

Solution de l'exercice 5.8. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et notons $S'_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 0$. On a $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$.

(1) On a convergence en loi vers $\sqrt{2}$ fois le mouvement brownien sur $[0,1]$. On remarque que $(S_i)_{0 \leq i \leq 2n}$ a la même loi que $(S'_i)_{0 \leq i \leq 2n}$, et le résultat découle du théorème de Donsker.

(2) On montre que la suite converge en loi vers $\sqrt{2}$ fois le pont brownien. On remarque maintenant que $(S_i)_{0 \leq i \leq 2n}$ a la même loi que $(S'_i)_{0 \leq i \leq 2n}$ sous le conditionnement $S'_{2n} = 0$. Le résultat désiré est alors une conséquence du théorème de Donsker conditionné de convergence vers le pont brownien. Il faut toutefois faire attention car nous avons ici une loi périodique (en cours le théorème a été formulé dans un cadre apériodique). Pour se ramener au cas apériodique, posons $Y_1 = (1 + X_1)/2$ et $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Alors puisque $\mathsf{Var}(Y_1) = 1/4$, d'après le théorème de Donsker conditionné (avec extension immédiate au cas non centré)

$$\left(\frac{T_{2nt} - nt}{\sqrt{n/2}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \qquad \text{sous } \mathbb{P}(\cdot \mid T_{2n} - n = 0) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad b,$$

où b est le mouvement brownien. Comme $T_{2nt} = nt + S'_{2nt}/2$, le résultat désiré en découle.

* * *

Solution de l'exercice 5.9.

(1) On écrit, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mu_n(k) = \mathbb{P}(X_1 = k | S_n = 0) = \mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} = -k)}{\mathbb{P}(S_n = 0)}.$$

D'après le théorème local limite le numérateur et le dénominateur sont tous les deux équivalents à $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}}$, de sorte que

$$\mu_n(k) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{P}(X_1 = k).$$

Ainsi, μ_n converge étroitement vers la loi de X_1.

(2) Oui, elle a raison. Vérifions que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans L^2, ce qui entrainera le résultat désiré. On a

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} = -k)}{\mathbb{P}(S_n = 0)}.$$

D'après le théorème local limite, il existe une constante $C > 0$ telle que $\frac{\mathbb{P}(S_{n-1}=-k)}{\mathbb{P}(S_n=0)}$ pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et le résultat s'ensuit.

* * *

Solution du problème 5.10.

(1) C'est une variante du principe des lois accompagnantes. On montre que pour tout fermé F

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n \in F) \leq \mathbb{P}(I \in F). \tag{11}$$

D'après l'inégalité de Markov, pour $\eta > 0$ on a $\mathbb{P}(|I_n(\delta) - I_n| \geq \eta) \leq \frac{\delta}{\eta}$. Donc en notant F^η le η-voisinage fermé de F on a

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n \in F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n(\delta) \in F^\eta) + \frac{\delta}{\eta} \leq \mathbb{P}(I(\delta) \in F^\eta) + \frac{\delta}{\eta}$$

en vertu de la convergence en loi de $I_n(\delta)$ vers $I(\delta)$. En faisant $\delta \to 0$, puis $\eta \to 0$ on obtient le résultat voulu (11).

Autre solution. Alternativement, on peut utiliser la caractérisation de la convergence en loi via les fonctions lipschitziennes bornées (théorème de portemanteau).

(2) On applique le théorème de Fubini à $(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{B_t=\delta}$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=\delta} \mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = \delta) \mathrm{d}t = 0,$$

donc p.s. $\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=\delta} \mathrm{d}t = 0$, ce qui donne le résultat.

(3) On écrit

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n}>\delta}. \tag{12}$$

D'après le théorème de Donsker et d'après le théorème de représentation de Skorokhod on peut supposer que $(S_{nt}/\sqrt{n} : 0 \leq t \leq 1)$ converge presque sûrement vers $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ où S_t est défini par interpolation linéaire pour $t > 0$. Alors d'après (2) presque sûrement la mesure de Lebesgue de $\{t \in [0,1] : |B_t| = \delta\}$ est nulle. Il s'ensuit que presque sûrement, pour presque tout $t \in [0,1]$ on a

$$\frac{1}{(|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n}>\delta} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t|>\delta}$$

et le résultat s'ensuit par convergence dominée.

Remarque. Alternativement à (12), on peut montrer "à la main" que

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(|S_{tn}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{tn}|/\sqrt{n}>\delta} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0$$

(4) On montre que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t\right] < \infty \tag{13}$$

ce qui impliquera que p.s. $\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t < \infty$. D'après le théorème de Fubini et d'après la propriété de scaling du mouvement brownien,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_t|^\gamma}\right] \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{\gamma/2}} \mathrm{d}t \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_1|^\gamma}\right].$$

Puisque $\gamma/2 < 1$, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[1/|B_1|^\gamma] < \infty$. Pour cela, on écrit simplement

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_1|^\gamma}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x < \infty$$

car $\gamma < 1$, et (13) s'ensuit.

(5) On pose

$$I_n = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1, S_i \neq 0}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma}, \qquad I_n(\delta) = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}}$$

et

$$I = \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t, \qquad I(\delta) = \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t|>\delta} \mathrm{d}t$$

et on vérifie qu'on peut appliquer (1).

Le point (i) découle par convergence monotone, le point (ii) provient de la question (3). Le point délicat est (ii). Pour cela, écrivons :

$$\mathbb{E}[|I_n(\delta) - I_n|] = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right].$$

Par corollaire du théorème local limit, il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathbb{P}(S_i = k) \leq \frac{C}{\sqrt{i}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $i \geq 1$ (dans la suite, C est une constante universelle qui peut changer de ligne en ligne). Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma}\mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right] = \sum_{k=1}^{\delta\sqrt{n}} \frac{1}{k^\gamma}\mathbb{P}(|S_i| = k) \leq C\sum_{k=1}^{\delta\sqrt{n}} \frac{1}{k^\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{i}} \leq C\cdot\delta^{1-\gamma}\cdot n^{1/2-\gamma/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Donc

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma}\mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right] \leq C\frac{\delta^{1-\gamma}\cdot n^{1/2-\gamma/2}}{n^{1-\gamma/2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \leq C\frac{\delta^{1-\gamma}\cdot n^{1/2-\gamma/2}}{n^{1-\gamma/2}}\cdot n^{1/2} \leq C\delta^{1-\gamma}.$$

Ceci démontre (c) (quitte à remplacement δ par une puissance de δ).

(∗) Dans ce cas $t \mapsto \frac{1}{B_t}$ n'est en fait pas intégrable sur $[0,1]$ (cela peut se voir en utilisant la notion de temps local).

* * *

Solution du problème 5.11.

(1) On a

$$\mathbb{E}[Z^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

En intégrant par parties, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^3\cdot xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} 3x^2\cdot\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = 3\sigma^4.$$

(2) Soit $H_n \to H$ avec $H \in [1/2, 1]$. On montre que $\mathbb{P}_{H_n}$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_H$. On suppose que W^n a pour loi $\mathbb{P}_{H_n}$.

Convergence des marginales fini-dimensionnelles. Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq 1$. Pour démontrer la convergence en loi de $((W^n_{t_1}, \ldots, W^n_{t_k}))_{n\geq1}$, vu la forme des fonctions caractéristiques des vecteurs gaussiens, il suffit de démontrer que les matrices de covariance convergent d'après le théorème de Lévy. On a

$$\mathbb{E}\left[W^n_{t_i}W^n_{t_j}\right] = \frac{1}{2}\left(t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left(t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right),$$

de sorte que les marginales fini-dimensionnelles de $\mathbb{P}_{H_n}$ convergent vers celles de $\mathbb{P}_H$.

Tension. On utilise le critère de tension de Kolmogorov. On a déjà vu que les marginales unidimensionnelles convergent. En utilisant le fait que $\mathbb{E}[(W^n_u)^2] = u^{2H_n}$, on calcule

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^2] = s^{2H_n} + t^{2H_n} - 2\cdot\frac{1}{2}\left(s^{2H_n} + t^{2H_n} - |s-t|^{2H_n}\right) = |s-t|^{2H_n}.$$

Ainsi, lorsque $H > 1/2$, il existe des constantes $C, \eta > 0$ telles que pour n assez grand, pour tout $s, t \in [0,1]$ on a

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^2] \leq C|s-t|^{1+\eta},$$

ce qui montre la tension.

Lorsque $H = 1/2$, on calcule le moment d'ordre 4. D'après le calcul précédent, $W^n_s - W^n_t$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $|s-t|^{2H_n}$, et donc d'après la première question

$$\mathbb{E}[(W^n_s - W^n_t)^4] = 3|s-t|^{4H_n},$$

et on conclut comme dans le cas $H > 1/2$.

(3) Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On pose $W_s = sN$ pour $0 \le s \le 1$. Ainsi $(W_s)_{0 \le s \le 1}$ est un vecteur gaussien de covariance $\mathbb{E}[W_s W_t] = st$, dont la loi est donc $\mathbb{P}_1$.

(4) Il suffit de vérifier le critère de tension de Kolmogorov. On montre qu'il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour n assez grand, pour tout $s, t \in [0,1]$:

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] \le C|s-t|^{1+\eta}.$$

Soit $C' > 0$ tel que $\mathbb{E}[S_n^2] \le Cn^{2H}$ pour tout $n \ge 1$. Soient $s \le t \in [0,1]$.

Premier cas : $\lfloor ns \rfloor = \lfloor nt \rfloor = k$. Alors $S_{ns} - S_{nt} = n(t-s)(S_{k+1} - S_k)$ et donc

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] = n^{2-2H}(t-s)^2 \mathbb{E}[(S_{k+1} - S_k)^2] = n^{2-2H}(t-s)^2 \mathbb{E}[S_1^2] \le C(t-s)^2$$

pour une certaine constante C.

Deuxième cas : $\lfloor ns \rfloor < \lfloor nt \rfloor$. Posons $k = \lfloor ns \rfloor$ et $\ell = \lfloor nt \rfloor$. Alors en utilisant le fait

$$|S_{nt} - S_{ns}| \le |S_{nt} - S_\ell| + |S_\ell - S_{k+1}| + |S_{k+1} - S_{ns}|,$$

le premier cas et l'inégalité $x \le x^H$ pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S_{ns} - S_{nt})^2]^{1/2} &\le \mathbb{E}[(S_{nt} - S_\ell)^2]^{1/2} + \mathbb{E}[(S_\ell - S_{k+1})^2]^{1/2} + \mathbb{E}[(S_{k+1} - S_{ns})^2]^{1/2} \\
&\le C(nt - \ell) + C'(\ell - (k+1))^H + C(k+1-ns) \\
&\le C(nt - \ell)^H + C'(\ell - (k+1))^H + C(k+1-ns)^H \\
&\le C(nt - ns)^H + C'(nt - ns)^H + C(nt - ns)^H \\
&\le (2C + C')n^H(t-s)^H,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}[|Z_n(s) - Z_n(t)|^2] \le C''(t-s)^{2H}.$$

Comme $2H > 1$, le critère de tension de Kolmogorov est vérifié.

(5) On vérifie les conditions de la question (4). Il suffit de vérifier que Z_n converge en loi au sens des fini-dimensionnelles dans $\mathcal{C}$ vers W. Pour cela, on remarque que $(Z_n(t) : 0 \le t \le 1)$ est un processus gaussien. Par ailleurs, vu la forme des fonctions caractéristiques des vecteurs gaussiens, pour démontrer la convergence des fini-dimensionnelles il suffit de démontrer que les matrices de covariance convergent d'après le théorème de Lévy. Pour cela, fixons $0 \le s < t < 1$ et calculons d'abord en utilisant la formule $xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - (x-y)^2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{2H}} \mathbb{E}\left[S_{\lfloor ns \rfloor} S_{\lfloor nt \rfloor}\right] &= \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor ns \rfloor}\right] + \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor}\right] - \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[(S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor ns \rfloor})^2\right] \\
&= \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor ns \rfloor}\right] + \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor}\right] - \frac{1}{2n^{2H}} \mathbb{E}\left[S^2_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}\right] \\
&\to \frac{c}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a $(S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor})/n^H \to 0$ en probabilité. Ceci découle du lemme de Slutsky combiné avec le fait que

$$\frac{|S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor}|}{n^H} \leq \frac{|S_{\lfloor nt \rfloor + 1}|}{n^H} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \quad 0$$

car $S_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ a la même loi que S_1 par la condition b).

(6) On a

$$\mathbb{E}[Y_i Y_{i+n}] = \mathbb{E}\left[(-1)^{X_{i+1}+\cdots+X_{i+n}}\right] = \mathbb{E}\left[(-1)^{X_1}\right]^n = (p-(1-p))^n = (2p-1)^n.$$

(7) C'est une conséquence du théorème de Donsker : dans le cas $p = 1/2$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$.

(8) Tout d'abord, comme $\mathbb{P}\left(X_1^k = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_1^k = -1\right) = 1/2$ on a $\mathbb{E}\left[Y_n^k\right] = 0$. Posons

$$G_n^k = \frac{Y_{n+1}^1 + \cdots + Y_{n+1}^k}{\sqrt{k}}.$$

D'après le théorème central limite, pour tout $n \geq 1$, G_n^k converge en loi lorsque $k \to \infty$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(G_1^k, \ldots, G_n^k)_{k\geq 1}$ est tendue. Vérifions l'unicité de la limite en montrant que toute limite en loi le long d'une sous-suite est un vecteur gaussien d'une certaine covariance donnée.

Quitte à extraire, supposons que $(G_1^k, \ldots, G_n^k)_{k\geq 1}$ converge en loi vers $(G_1, \ldots, G_n)$. Alors pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a

$$a_1 G_1^k + \cdots + a_n G_n^k = \frac{(a_1 Y_2^1 + \cdots + a_n Y_{n+1}^1) + \cdots + (a_1 Y_2^k + \cdots + a_n Y_{n+1}^k)}{\sqrt{k}},$$

qui converge en loi vers une loi normale d'après le théorème central limite, ce qui montre que $a_1 G_1 + \cdots + a_n G_n$ suit une loi normale. Pour trouver la matrice de covariance de $(G_1, \ldots, G_n)$ on remarque que pour tout $i \geq 1$, $(G_i^k)_{k\geq 1}$ est bornée dans L^4, donc pour $i \geq 1$ et $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[G_i^k G_{i+n}^k\right] \quad \xrightarrow[k\to\infty]{} \quad \mathbb{E}[G_i G_{i+n}].$$

Mais par indépendance

$$\mathbb{E}\left[G_i^k G_{i+n}^k\right] = \mathbb{E}\left[Y_{i+1}^1 Y_{n+i+1}^1\right] = \mathbb{E}[Y_2^1 Y_{n+2}^1]$$

ne dépend pas de k ni de i.

D'après la question (5),

$$r(n) = \mathbb{E}[(2P-1)^n] = (1-H)2^{3-2H} \int_{1/2}^1 (2u-1)^n (1-u)^{1-2H} \mathrm{d}u$$

et le résultat s'ensuit grâce à la remarque.

(9) On vérifie que les conditions de la question (5) sont satisfaites. On a déjà vu que $(G_n)_{n\geq 1}$ est un vecteur gaussien. Le fait que $V_{n+i} - V_n$ a la même loi que S_i provient du fait que $Y_2^1 + \cdots + Y_{i+1}^1$ a la même loi que $Y_{n+2}^1 + \cdots + Y_{n+i+1}^1$. Il reste à vérifier la condition (c). On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}[(G_1 + \cdots + G_n)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[G_i G_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r(|i-j|) \\ &= nr(0) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} r(k). \end{aligned}$$

. Par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^{i} r(k) \quad \underset{i\to\infty}{\sim} \quad \frac{H}{c_H^2} i^{2H-1}$$

puis

$$2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_H^2} \frac{1}{H} i^{2H-1} \qquad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{c_H^2} n^{2H}$$

de sorte que

$$r(n) \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{c_H^2} n^{2H}$$

ce qui conclut.

Remarque. Le processus W s'appelle le *mouvement brownien fractionaire* ; ce problème est inspiré de l'article de Nathanaël Enriquez "A simple construction of the fractional Brownian motion." Stochastic Processes and their Applications 109.2 (2004) : 203-223.

* * *

6 L'espace des fonctions càdlàg

6.1 Exercices

Exercice 6.1. On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions càdlàg sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la topologie J_1 de Skorokhod définie en cours. Pour une variable aléatoire Z, on note F_Z sa fonction de répartition définie par $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \le t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, vue comme élément de $\mathbb{D}$ par restriction à $[0,1]$.

Soient $(X_n)_{n\ge1}, X$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $[\frac{1}{2},1]$.

(1) Alix dit : "si X_n converge en loi, alors F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$." A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : "si F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$, alors X_n converge en loi." A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

* * *

Problème 6.2.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes, sauf la question (6) qui utilise des résultats de parties précédentes.

Notations et rappels. Pour un espace vectoriel E et $A \subset E$, on note $\mathrm{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A, définie par

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \ge 1, a_i \in A \text{ et } \lambda_i \in [0,1] \text{ pour } 1 \le i \le n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod. Pour $x \in \mathbb{D}$ et $0 < t \le 1$, on note $\Delta x(t) = x(t) - x(t-)$ et $\Delta x(0) = 0$. Pour $0 < \delta \le 1$ et $x \in \mathbb{D}$ on note

$$\omega'(x,\delta) = \inf \max_{1\le i\le n} \sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i[} |x(s)-x(t)|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les partitions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0,1]$ telles que $\min_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1}) > \delta$.

Pour un espace métrique E et $A \subset E$, on rappelle que A est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, et que A est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact. Si E est complet, on rappelle qu'une partie est précompacte si et seulement si elle est relativement compacte.

On rappelle qu'une famille $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\sup_{x\in\mathcal{F}} \|x\|_\infty < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sup_{x\in\mathcal{F}} \omega'(x,\delta) \le \varepsilon$.

Première partie. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet séparable.

(1) Si $K \subset E$ est compact, montrer que l'enveloppe convexe de K, notée $\mathrm{co}(K)$ est précompacte.

(2) Montrer que toute mesure de probabilité sur E est convexe-tendue, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact convexe K tel que $\mu(K) \ge 1 - \varepsilon$.

Deuxième partie.

(3) On considère

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \mathbb{1}_{[s,1]} : \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4} \right\}.$$

Justifier que $\mathcal{F}_0$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$ et que $\mathrm{co}(\mathcal{F}_0)$ n'est pas relativement compact dans $\mathbb{D}$.

Pour $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$S_\varepsilon(F) = \left\{ t \in [0,1] : \sup_{x \in \mathcal{F}} |\Delta x(t)| > \varepsilon \right\}.$$

(4) On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$.

Troisième partie. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{D}$. On dit que X est continu en probabilité si pour toute suite $t_n \to t$, la suite $(X(t_n))_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $X(t)$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Donner un exemple où $\forall \omega \in \Omega$, X_ω n'est pas continu mais X est continu en probabilité.

(6) On suppose que X est continu en probabilité et que sa loi est convexe-tendue. Démontrer que X est continu p.s.

(7) Toute mesure de probabilité sur $\mathbb{D}$ est-elle convexe-tendue ? Est-ce contradictoire avec (2) ?

Question bonus : On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact.

* * *

Problème 6.3. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorokhod introduite en cours. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$. On pose pour $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\ldots,n\} : U_i \leq t\}), \qquad B_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

L'objectif de ce problème est de montrer que B_n converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

On dit qu'un vecteur aléatoire $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(k, p_1, \ldots, p_n)$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq p_1, \ldots, p_n \leq 1$ si

$$\mathbb{P}((M_1, \ldots, M_n) = (m_1, \ldots, m_n)) = \frac{k!}{\prod_{i=1}^n m_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{m_i}$$

pour tous entiers positifs $m_1, \ldots, m_n$ tels que $m_1 + \cdots + m_n = k$.

On pose, pour $1 \leq j \leq n$:

$$N_j = \mathrm{Card}(\{i \in \{1,2,\ldots,n\} : U_i \in [(j-1)/n, j/n]\}).$$

(1) Démontrer que $(N_1,\dots,N_n)$ suit une loi multinomiale et identifier ses paramètres.

Soit $(P_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de Poisson de paramètre 1. On pose pour $0 \leq k \leq n$:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k}(P_i - 1)$$

et on définit S_t pour $t \geq 0$ par interpolation linéaire. Soient enfin $\widehat{B_n} \in \mathcal{C}$ la fonction obtenue en interpolant linéairement B_n aux points $\{k/n, 0 \leq k \leq n\}$ et $\widehat{S_n} \in \mathcal{C}$ une variable aléatoire dont la loi est la loi conditionnelle de $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt})_{0\leq t\leq 1}$ sachant que $S_n = 0$.

(2) Démontrer que $\widehat{B_n}$ et $\widehat{S_n}$ ont même loi.

(3) Justifier que $\widehat{B_n}$ converge en loi dans $\mathbb{D}$ vers le pont brownien.

(4) Démontrer que $\sup_{0\leq t\leq 1} |\widehat{B_n}(t) - B_n(t)| \to 0$ en probabilité.

(5) Conclure.

* * *

6.2 Solutions

Solution de l'exercice 6.1.

(1) Non. Par exemple, si la loi de X_n est $\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}$, alors F_{X_n} ne converge pas vers $\mathbb{D}$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que F_{X_n} converge vers F dans $\mathbb{D}$. Alors F_{X_n} converge simplement vers F en tout point de continuité de F. Puisque F_{X_n} converge simplement vers $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$ et que F est càdlàg, on en déduit que $F = 0$ sur $[0, 1/2[$ et $F = 1$ sur $[1/2, 1]$. Mais pour tout changement de temps $\lambda : [0,1] \to [0,1]$, on peut trouver $t_n \in [0,1]$ tel que $\lambda_n(t_n) = 1/2 + 1/n$, de sorte que

$$|F_{X_n}(\lambda_n(t_n)) - F(t_n)| = 1/2 \quad \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \quad 0.$$

(2) Oui. Soit F la limite de F_{X_n}. Puisque (X_n) est bornée, elle est tendue. Il suffit de montrer l'unicité en loi de la limite de toute sous suite. Supposons que $X_{\phi(n)}$ converge en loi vers X. Notons D l'ensemble des points de discontinuité de F et de F_X. Alors $F_{X_n}(t)$ converge vers $F(t)$ et vers $F_X(t)$ pour tout $t \in [0,1]\backslash D$. Ainsi F et F_X sont deux fonctions càdlàg qui coincident sur un ensemble dénombrable dense. Elles sont donc égales, ce qui conclut.

Autre solution. En notant F la limite de F_{X_n}, on vérifie que F est croissante, càdlàg, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, de sorte que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Par propriétés de convergence dans $\mathbb{D}$, F_{X_n} converge simplement vers F en tout point de continuité de F.

* * *

Solution du problème 6.2.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de K, on peut écrire $K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Alors co$(K)$ est inclus dans le ε voisinage fermé de co$(x_1,\dots,x_n)$, qui est précompact puisqu'on voit aisément que co$(\{x_1,\dots,x_n\})$ est compact.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Prokhorov, il existe un compact C tel que $\mu(C) \geq 1-\varepsilon$. On obtient le résultat désiré en prenant $K = \overline{\mathrm{co}(C)}$.

(3) On a bien $\sup_{x\in\mathcal{F}_0} \|x\|_\infty < \infty$. D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, en prenant $\delta < 1/4$, on a $\sup_{x\in\mathcal{F}_0} \omega'(x,\delta) = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}_0$ est relativement compact. En revanche, en prenant

$$x_n = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1/2-1/n,1]} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1/2+1/n,1]} \in \mathrm{co}(\mathcal{F}_0),$$

la suite (x_n) n' pas de sous-suites qui convergent, de sorte que $\mathrm{co}(\mathcal{F}_0)$ n'est pas relativement compact dans $\mathbb{D}$.

(4) On raisonne par l'absurde. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) = \infty$. Il existe alors $u_0 \in [0,1]$ et une suite (u_n) d'éléments distincts de $S_\varepsilon(K)$ convergeant vers u_0, et une suite (x_n) d'éléments de K tels que $|\Delta x_n(u_n)| > \varepsilon$. Par compacité de K, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\sup_{x\in K} w'(x,\delta_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit maintenant $0 < \delta < \delta_0$. On a encore

$$\sup_{x\in K} w'(x,\delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $x_{m,n} = \frac{1}{2}x_m + \frac{1}{2}x_n$. On va vérifier que $w'(x_{m,n},\delta) \geq \varepsilon/4$ pour m,n assez grands.

À cet effet, fixons $m,n \geq 1$ tels que $u_0-\delta/2 < u_m, u_n < u_0+\delta/2$ et $|\Delta x_n(u_n)| > \varepsilon$ et $|\Delta x_m(u_m)| > \varepsilon$. A fortiori, pour $i = m,n$:

$$\sup_{u_i\leq s,t<u_i+\delta} |x_i(t)-x_i(s)| < \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \sup_{u_i-\delta\leq s,t<u_i} |x_i(t)-x_i(s)| < \varepsilon/2.$$

On considère une partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0,1]$ telle que que $\min_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) > \delta$. Comme $|u_m - u_n| < \delta$, $\{t_0,\ldots,t_n\}$ peut contenir u_m ou u_n, ou aucun des deux, mais pas les deux. En séparant les cas, on obtient aisément que $w'(x_{m,n},\delta) \geq \varepsilon/4$. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on aboutit à une contradiction.

(5) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$. On pose $X = \mathbb{1}_{[U,1]}$, qui convient. En effet, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X(t_n)-X(t)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(U \in [\min(t_n,n),\max(t_n,t)]) = |t_n - t| \to 0$.

(6) Soit $\eta > 0$ et K un compact convexe tel que $\mathbb{P}(X\in K) \geq 1-\eta$. D'après (4), pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$. Il existe donc $t_1,\ldots,t_n \in [0,1]$ tels que

$$\mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1]\backslash\{t_1,\ldots,t_n\}) \geq \mathbb{P}(X\in K) \geq 1-\eta.$$

Remarquons que si $\mathbb{P}(|\Delta X(t)| \geq \varepsilon) > 0$, alors X n'est pas continu en probabilité. Ainsi

$$\mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1]\backslash\{t_1,\ldots,t_n\}) = \mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1]) \geq 1-\eta.$$

En faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(X \text{ est continu}) \geq 1-\eta$. On conclut en faisant $\eta \downarrow 0$.

(7) Soit X l'exemple de la question (5). D'après les questions (5) et (6), sa loi n'est pas convexe-tendue. Ce n'est pas contradictoire avec (2) car $\mathbb{D}$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod n'est pas une topologie d'espace vectoriel normé.

Remarque. Ce problème est inspiré par la Remark 2.5 dans

Basse-O'Connor, Andreas, and Jan Rosiński. "On the uniform convergence of random series in Skorohod space and representations of cadlag infinitely divisible processes." The Annals of Probability 41.6 (2013) : 4317-4341.

https://arxiv.org/pdf/1111.1682.pdf

Pour la question bonus, voir le Theorem 6 dans Peter Z. Daffer, Robert L. Taylor "Laws of Large Numbers for $D[0,1]$, *Ann. Probab.* **7(1)**, 85-95, (February, 1979)

***

Solution du problème 6.3.

(1) Pour des entiers positifs $m_1,\ldots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ on a

$$\mathbb{P}\left((N_1,\ldots,N_n)=(m_1,\ldots,m_n)\right)=\binom{n}{m_1,\ldots,m_n}\frac{1}{n^n}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^n m_i!}\frac{1}{n^n}$$

de sorte que $(N_1,\ldots,N_n)$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(n,1/n,\ldots,1/n)$.

(2) Il suffit de vérifier que $(\widehat{B}_n(0),\widehat{B}_n(1/n),\ldots,\widehat{B}_n(n/n)$ et $(\widehat{S}_n(0),\widehat{S}_n(1/n),\ldots,\widehat{S}_n(n/n))$ ont même loi. Remarquons que pour $0\leq k\leq n$ on a

$$\widehat{B}_n(k/n)=\sum_{i=1}^k(N_i-1),\qquad \widehat{S}_n(k/n)=\sum_{i=1}^k(P_i-1)\text{ sous }\mathbb{P}(\cdot|S_n=0).$$

Il suffit donc de vérifier que $(P_1,\ldots,P_n)$ sous $\mathbb{P}(\cdot|S_n=0)$ suit la loi multinomiale $\mathsf{M}(n,1/n,\ldots,1/n)$. Pour cela, remarquons que le support de la loi de ce vecteur est bien l'ensemble des entiers positifs $m_1,\ldots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ en vertu du conditionnement. Ensuite, pour des entiers positifs $m_1,\ldots,m_n$ tels que $m_1+\cdots+m_n=n$ on a

$$\mathbb{P}\left((P_1,\ldots,P_n)=(m_1,\ldots,m_n)|S_n=0\right)=\frac{1}{\mathbb{P}(S_n=0)}\prod_{i=1}^n e^{-1}\frac{1}{m_i!}.$$

Or S_n+n suit une loi de Poisson de paramètre n, de sorte que $\mathbb{P}(S_n=0)=e^{-n}\frac{n^n}{n!}$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left((P_1-1,\ldots,P_n-1)=(m_1,\ldots,m_n)|S_n=0\right)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^n m_i!}\frac{1}{n^n},$$

d'où le résultat.

(3) Puisque $\mathbb{E}[P_1-1]=0$ et $\mathsf{Var}(P_1-1)=1$, d'après le théorème de Donsker conditionné vu en cours $\widehat{S}_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers le pont brownien. Comme $\widehat{B}_n$ et $\widehat{S}_n$ ont même loi, il en est de même de $\widehat{B}_n$. Ensuite, si $f_n,f\in\mathcal{C}$ sont telles que $f_n\to f$ dans $\mathcal{C}$, alors $f_n\to f$ dans $\mathbb{D}$ (prendre le changement de temps égal à l'identité). Autrement dit, l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est continue. On conclut par stabilitité de la convergence en loi par composition par une fonction continue.

(4) *Première solution.* On commence par écrire

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\widehat{B}_n(t) - B_n(t)| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \le k \le n} N_k.$$

En remarquant que les N_i suivent des lois $\mathsf{Bin}(n, 1/n)$, on a alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \le k \le n} N_k \ge \varepsilon\sqrt{n}\right) \le n\mathbb{P}\left(N_1 \ge \varepsilon\sqrt{n}\right) \le n\mathbb{E}\left[e^{N_1}\right]e^{-\varepsilon\sqrt{n}} = n\left(1 + \frac{e-1}{n}\right)^n e^{-\varepsilon\sqrt{n}} \sim ne^{e-1}e^{-\varepsilon\sqrt{n}}$$

qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Deuxième solution. Si $\frac{i}{n} \le t < \frac{i+1}{n}$ pour $0 \le i \le n-1$, on remarque que

$$B_n\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \le B_n(t) \le B_n\left(\frac{i+1}{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad B_n\left(\frac{i}{n}\right) \le \widehat{B}_n(t) \le B_n\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Comme $\widehat{B}_n(i/n) = B_n(i/n)$ pour $0 \le i \le n$ on en déduit que

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\widehat{B}_n(t) - B_n(t)| \le \max_{0 \le i \le n-1} \left|\widehat{B}_n\left(\frac{i+1}{n}\right) - \widehat{B}_n\left(\frac{i}{n}\right)\right| + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $\widehat{B}_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers le pont brownien. Ainsi pour tout $\varepsilon, \eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour n assez grand

$$\mathbb{P}\left(\omega(\widehat{B}_n, \delta) > \eta\right) \le \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n > 1/\delta$ assez grand on a

$$\max_{0 \le i \le n-1} \left|\widehat{B}_n\left(\frac{i+1}{n}\right) - \widehat{B}_n\left(\frac{i}{n}\right)\right| < \eta$$

avec probabilité au moins $1 - \varepsilon$. Ceci conclut.

(5) Tout d'abord, en notant d_S la distance de Skorokhod

$$d_S(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max(\|\lambda - \mathrm{Id}\|_\infty, \|f \circ \lambda - g\|_\infty)$$

avec Λ l'ensemble des changements de temps, vérifions que $d_S(\widehat{B}_n, B_n) \to 0$ en probabilité. D'après la question précédente et le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que $\|\widehat{B}_n - B_n\|_\infty \to 0$ presque sûrement. Alors en prenant le changement de temps égal à l'identité, on voit que presque sûrement $d_S(\widehat{B}_n, B_n) \to 0$, d'où le résultat.

Ainsi, $\widehat{B}_n$ converge en loi vers le pont brownien dans $\mathbb{D}$ et $d_S(\widehat{B}_n, B_n)$ converge en probabilité vers 0. On en déduit que B_n converge en loi vers le pont brownien.

Remarque. Ce problème est inspiré de l'article suivant :

Jean-François Marckert. "One more approach to the convergence of the empirical process to the Brownian bridge." Electronic Journal of Statistics, 2 118-126 2008
https://arxiv.org/pdf/0710.3296.pdf

* * *

7 Mesures aléatoires de Poisson

7.1 Exercices

Exercice 7.1. Soit M un nuage poissonnien d'intensité $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$. On note M_θ et M_R les nuages de Poisson sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{R}_+$ obtenus à partir de M en considérant les angles et les distances à l'origine des points de M. Donner les intensités de ces deux nuages. Sont-ils indépendants ?

* * *

Exercice 7.2. Soit M un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\lambda(t)\mathrm{d}t$, avec $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_0^\infty \lambda(t)\mathrm{d}t = \infty$.

1. Justifier qu'on peut écrire M sous la forme $M = \sum_{k=1}^\infty \delta_{T_k}$ où $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ sont des variables aléatoires.
2. On pose $a(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$. Montrer que $M' = \sum_{k\geq 1} \delta_{a(T_k)}$ est un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}x$.

On suppose à partir de maintenant que $\lambda(t) = \frac{t}{1+t}$ pour $t \geq 0$.

3. Calculer la loi de T_1 et celle de (T_1, T_2).
4. Montrer que presque sûrement

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{T_n^2} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{T_n} = \infty.$$

5. Montrer que $T_{n+1} - T_n$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite.

* * *

Exercice 7.3. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et N un nuage poissonien d'intensité $\mathrm{d}x \otimes \mu$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On note $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(X_n, V_n)}$ avec

$$\cdots < X_{-k} < \cdots < X_0 < 0 < X_1 < \cdots < X_\ell < \cdots,$$

et on voit N comme une distribution de particules sur la droite réelle, chaque particule n étant initialement en position X_n avec vitesse V_n.

(a) On pose $N_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(X_n + tV_n, V_n)}$. Montrer que N_t est encore un nuage poissonien d'intensité $\mathrm{d}x \otimes \mu$.

(b) On suppose $\int_{\mathbb{R}} |v|\mu(\mathrm{d}v) < \infty$. Soit T_n le temps (éventuellement négatif) auquel la particule n atteint 0 : $T_n = \frac{X_n}{V_n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(T_n, V_n)}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dont on donnera l'intensité.

(c) Calculer $\mathbb{P}(\forall s \in [0,t], \forall n \in \mathbb{Z}, X_n + sV_n \notin [a,b])$ où $[a,b]$ est un intervalle fixé et déterminer la loi de $\inf\{t \geq 0 : \exists s \in [0,t], \exists n \in \mathbb{Z}, X_n + sV_n \in [a,b]\}$.

* * *

Exercice 7.4. Soit M un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour $\lambda > 0$, écrit sous la forme $M = \sum_{i\geq 1} \delta_{X_i}$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

1. Calculer la loi de $\inf_{i\geq 1}|X_i|$.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes de M. Montrer que $M' = \sum_{i\geq 1}\delta_{X_i+Y_i}$ a la même loi que M.
3. Soit maintenant $(R_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. réelles positives indépendantes de M. On considère l'ensemble aléatoire
$$A = \bigcup_{i\geq 1} B(X_i, R_i),$$
où $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer la loi du nombre de boules de A qui recouvrent un point donné $x\in\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2]=\infty$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}^2$ on a presque sûrement $x\in A$.
   (c) En déduire que si $\mathbb{E}[R_1^2]=\infty$ alors $A=\mathbb{R}^2$.
   (d) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2]<\infty$ alors $A\neq\mathbb{R}^2$ presque sûrement.
4. On suppose que $R_i = r > 0$. On note $\mathcal{C}(0)$ l'amas de l'origine, c'est-à-dire les points accessibles depuis l'origine par un chemin qui reste dans A.
   (a) On note $\mathbb{P}_{\lambda,r}$ la loi de A avec intensité $\lambda>0$ et rayon $r>0$. Montrer que
$$\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathcal{C}(0)\text{ non borné}) = \mathbb{P}_{1,\sqrt{\lambda}r}(\mathcal{C}(0)\text{ non borné}) = \mathbb{P}_{\lambda r^2,1}(\mathcal{C}(0)\text{ non borné}).$$
   (b) Montrer que $\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathcal{C}(0)\text{ non borné})$ est croissante en λ et en r.

***

Exercice 7.5. – *(Théorème de Rényi)* – Soit M une variable aléatoire à valeurs dans $M^s_{atom}(\mathbb{R}_+)$ (sous-ensemble des mesures $\mu\in M_{atom}(\mathbb{R}_+)$ dont les atomes sont deux à deux distincts), presque sûrement finie sur les compacts. On suppose que pour tout borélien A de $\mathbb{R}_+$ on a
$$\mathbb{P}(M(A)=0) = e^{-\lambda(A)},$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Soient $I_1,\dots,I_m$ des intervalles deux à deux disjoints. Montrer que les événements $\{M(I_j)=0 : 1\leq j\leq m\}$ sont indépendants.

(2) Pour tout $n,k\geq 0$ on pose $D_{n,k}=[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[$. Soit J un sous-intervalle borné de $\mathbb{R}_+$, d'intérieur non vide. Pour $n\geq 0$, on note $K_n = \mathrm{Card}\{k\geq 0 : D_{n,k}\subseteq J\}$ et
$$M_n(J) = \sum_{k\geq 0 : D_{n,k}\subseteq J} \mathbb{1}_{\{M(D_{n,k})\neq 0\}}.$$
Déterminer la loi de $M_n(J)$ en termes de n et de K_n.

(3) Montrer que l'on a $M_n(J)\uparrow M(J)$ presque-sûrement lorsque $n\to\infty$ (on considérera les atomes de M dans J et on vérifiera dans un premier temps qu'ils sont tous distincts de $\inf J$ et $\sup J$) et en déduire la loi de $M(J)$.

(4) Soient $J_1,\dots,J_k$ des sous-intervalles bornés deux à deux disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que les variables aléatoires $M(J_1),\dots,M(J_k)$ sont indépendantes.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@math.cnrs.fr

(5) On note $N_t = M([0,t])$, $t \geq 0$, le processus de comptage associé à M. Montrer que N est un processus de Poisson d'intensité 1. En déduire que M est une mesure de Poisson d'intensité $\lambda(\mathrm{d}x)$.

* * *

Exercice 7.6. Trouver une tribu $\mathcal{E}$ sur $[0,1]$ et une mesure de probabilité μ sur $([0,1],\mathcal{E})$ telle que $\mu(B) \in \{0,1\}$ pour tout $B \in \mathcal{E}$ mais telle que μ ne soit pas une masse de Dirac.

* * *